

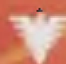
高中数学竞赛专题讲座

丛书策划 李胜宏
丛书主编 陶平生 苏建一
刘康宁 边红平

L I T I J I H E

立体几何

本书主编 刘康宁



浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座. 立体几何 / 陶平生等主编.
杭州:浙江大学出版社,2007.4
ISBN 978-7-308-05233-7

Ⅰ.高... Ⅱ.陶... Ⅲ.立体几何课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 039721 号

立体几何

本书主编 刘康宁

责任编辑 尤建忠
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
排 版 浙江大学出版社电脑排版中心
印 刷 杭州富阳育才印刷有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 16.75
印 数 00001—10000
字 数 355 千
版 印 次 2007 年 4 月第 1 版 2007 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-05233-7
定 价 19.50 元

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88072522

编写说明

影响最大、级别最高的中学生"国际数学奥林匹克"(简称IMO)由来已久,自第1届IMO于1959年在罗马尼亚举行以来,有近60年的历史,其影响越来越广泛。在国际数学奥林匹克的推动下,世界各地的数学竞赛活动如火如荼。目前,我国数学竞赛逐步形成了从全国联合竞赛、全国中学生数学冬令营到国家集训队一个完整的竞赛选拔体系。

数学竞赛作为一项智力活动,吸引了无数数学爱好者积极参与,也为那些对数学有浓厚兴趣和有数学天赋的学生提供一个展示自我的平台,是发现和培养数学人才的一条有效渠道。我们欣喜地看到,通过这项活动,发现了一批数学苗子,培养了一批数学人才。许多参与竞赛的优秀选手后来都成了杰出的数学家。

总体看来,我国的数学竞赛体制日趋完善,它的一些功能和作用也日益凸显。随着高校招生制度的改革,各种学科竞赛,尤其是数学竞赛的选拔功能越来越被广大高校所认可。事实上,学科竞赛已经成为高校自主招生和选拔人才的重要途径之一。

我们本着为数学竞赛的普及、提高做点有益事情的愿望,在全国范围内组织一批长期从事数学竞赛且做出杰出成绩的一线专家编写了一套"高中数学竞赛专题讲座丛书"。丛书包括《初等数论》、《函数与函数方程》、《复数与多项式》、《不等式》、《组合问题》、《排列组合与概率》、《数列与归纳法》、《集合与简易逻辑》、《三角函数》、《立体几何》、《平面几何》、《解析几何》和《数学结构思想及解题方法》13种。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本数学思想、方法,凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是:

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题，通过对典型例题的解剖，传授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2. 本着少而精的原则选择材料，不搞题海战术，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3. 以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格和解决实际问题的能力；

4. 在注重基础知识训练同时，有适当程度的拔高，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有一定的指导作用和参考价值。

丛书由浙江大学数学系教授、博士生导师、全国数学奥林匹克竞赛领队李胜宏策划；丛书由陶平生、苏建一、刘康宁、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、苏建一、刘康宁、边红平、黄军华、王建中、岑爱国、韦吉珠、张雷、王俊明、李世杰、沈虎跃、斯理炯、虞金龙、马洪炎。

鉴于我们的水平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。

目 录







第1讲 平面与空间直线

知识点金

1. 平面的基本性质

公理1 如果一条直线上有两个点在一个平面上，那么这条直线上的所有点都在这个平面上.

公理2 如果两个平面有一个公共点，那么它们有且仅有一条经过该点的直线.

公理3 不在同一条直线上的三点确定一个平面.

公理1是判定直线在平面内的依据；公理2说的是两个平面相交于一条直线（这条直线叫做这两个相交平面的交线）；公理3是确定平面的重要依据，它还有如下三个推论：

推论1 过一条直线和这条直线外一点确定一个平面.

推论2 过两条相交直线确定一个平面.

推论3 过两条平行直线确定一个平面.

2. 空间两条直线的位置关系

(1) 空间两条直线可分为共面（相交或平行）直线和异面直线两大类.

(2) 异面直线

不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线.

判断两条直线为异面直线的方法有：① 反证法；② 连接平面内一点和平面外一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线；③ 如果 A_1、A_2 和 B_1、B_2 分别是两条异面直线 a、b 上不同的点，那么直线 A_1B_1、A_2B_2 是异面直线.

关于两条异面直线所成的角以及它们之间的距离，我们将在后面进行专题讲座.

(3) 平行直线

公理4 如果空间中的两条直线同平行于一条直线，那么这两条直线互相平行.



直线与平面、平面与平面的性质定理，大都是两条直线平行的判定定理.

(4) 垂直直线

如果两条直线所成的角是直角，那么这两条直线互相垂直.

直线与平面、平面与平面的性质定理，大都是两条直线垂直的判定定理.

三垂线定理　在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直.

三垂线定理的逆定理　在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线在平面内的射影垂直.

例题精析

例1　空间4个点，过其中3点作平面，可以作平面的个数为……………………（　）

A. 1个　　B. 4个

C. 1个或4个　　D. 1个或4个或无数个

分析　根据公理3，不在同一条直线上的三点确定一个平面. 对于空间4点，过其中每3点可作多少个平面，将取决于其中是否存在三点共线，因此需要讨论.

解　设 A、B、C、D 为空间4个点.

(1) 若其中有3点共线，不妨设 A、B、C 三点共线于 l.

① 若 D 点在 l 上，则可作无数个平面；

② 若 D 点不在 l 上，则只有作1个平面.

(2) 若其中任意3点不共线，不妨设 A、B、C 不共线，则 A、B、C 确定一个平面 α.

① 若 D 点在 α 上，则可作1个平面；

② 若 D 点不在 α 上，则可作4个平面.

综上所述，应选结论D.

评注　对于3个以上的点确定平面个数的讨论，应该先对点的位置关系进行分类.

例2　(第12届希望杯数学邀请赛试题) 设 a、b、c 是空间三条直线，下面给出5个命题：

① 若 a 和 b 相交，b 和 c 相交，则 a 和 c 也相交；

② 若 a 和 b 平行，b 和 c 平行，则 a 和 c 也平行；

③ 若 a 和 b 垂直，b 和 c 垂直，则 a 和 c 也垂直；

④ 若 a 和 b 是异面直线，b 和 c 是异面直线，则 a 和 c 也是异面直线；

⑤ 若 a 和 b 共面，b 和 c 共面，则 a 和 c 也共面.



其中真命题的个数是 …………………………………………………………………（ ）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

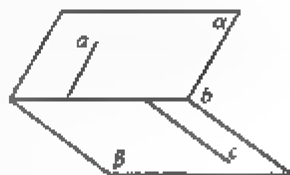


图1-1

分析　这是空间关于三条直线两两位置关系的一个传递性问题. 对于真命题,要能给予证明;对于假命题,要能举出一个恰当的反例.

解　命题②符合公理4,是真命题. ①、③、④、⑤都是假命题. 如图1-1,平面α与β相交于直线b,且α与β不垂直,$a\subset\alpha$,$c\subset\beta$,$a\perp b$,$c\perp b$,由此容易判断①、③、⑤均为假命题;借助正方体中的棱所在直线的异面关系,也容易否定命题④. 故本题应选A.

评注　构造反例模型图是否定一个命题常用的方法. 常见的模型图有正方体、四面体、空间四边形、平行六面体等.

例3　如图1-2,点A、B、C确定的平面与点D、E、F确定的平面相交于直线l,且AB与l相交,EF与l也相交. 试作出平面ABD与平面CEF的交线.

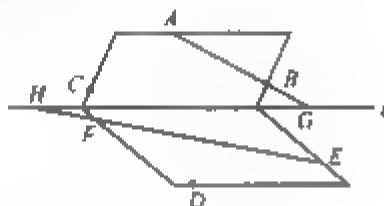


图1-2

作法　(1) 连接AB交l于G,连接EF交l于H;

(2) 连接DG交________于________;

(3) 连接CH交________于________;

(4) 连接________,此即所求作的交线.

分析　为了作出两平面的交线,只需找出交线上的两个点,而每一个点又需要分别在两个平面上通过两条相交直线来确定. 因此,关键还是要作出平面. 注意到三个平面两两相交有三条交线时,其交线或交于一点,或互相平行. 而AB与l是相交的,所以面ABD与面ABC、面DEF相交于一点,找出这一点是解题的突破口.

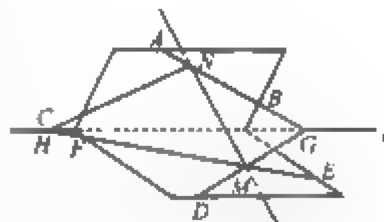


图1-3

解　如图1-3,在面ABC上,连接AB交l于G,则点G在面DEF上;连接DG交EF于$\underline{M}$,则点M在面ABD上,又在面CEF上,即点M在面ABD与面CEF的交线上. 同理可作出$\underline{点\ N}$,则直线$\underline{MN}$即为所求.

评注　这是一道"展示全貌,留空回填"题,它有利于训练思维的条理性和克服书写的随意性.

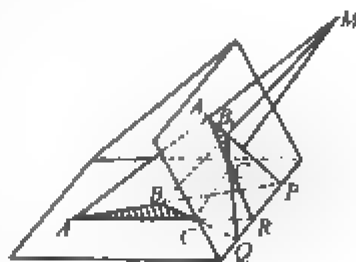


图1-4

例4　如图1-4,$\triangle ABC$所在平面和$\triangle A_1B_1C_1$所在平面相交,并且直线AA_1、BB_1、CC_1相交于M点. 求证:

(1) 直线AB和A_1B_1、直线BC和B_1C_1、直线AC和A_1C_1



分别在同一平面内；

(2) 如果直线 AB 和 A_1B_1、直线 BC 和 B_1C_1、直线 AC 和 A_1C_1 分别相交于点 P、Q、R，那么 P、Q、R 三点在同一条直线上.

分析 对于第(1)小题，要证明直线 AB 和 A_1B_1 在同一平面内，根据题设条件，直线 AA_1 和 BB_1 相交于点 M，所以它们可确定一个平面. 再由点 A、B 在这个平面上，根据公理1，直线 AB 在这个平面内. 同理，直线 A_1B_1 也在这个平面内. 对于第(2)小题，可考虑证明点 P、Q、R 都在平面 ABC 和平面 $A_1B_1C_1$ 的交线上.

证明 (1) 因为直线 AA_1 和 BB_1 相交于 M 点，所以直线 AA_1 和 BB_1 确定一个平面 α.

又因为 $A \in AA_1$，$B \in BB_1$，所以，$A \in \alpha$，$B \in \alpha$.

从而，$AB \subset \alpha$.

同理，$A_1B_1 \subset \alpha$.

故直线 AB 和 A_1B_1 在同一平面内.

同理可证，直线 BC 和 B_1C_1、直线 AC 和 A_1C_1 也分别在同一平面内.

(2) 因为 $P \in AB$，所以 $P \in$ 平面 ABC.

又因为 $P \in A_1B_1$，所以 $P \in$ 平面 $A_1B_1C_1$.

故点 P 在平面 ABC 和平面 $A_1B_1C_1$ 的交线 l 上.

同理可证，点 Q、R 也都在交线 l 上.

于是，P、Q、R 三点在同一直线上.

评注 (Ⅰ) 证明直线在平面内，根据公理1，只要证明这条直线上有两个点在这个平面上即可.(Ⅱ) 证明三点在同一条直线上，除了应用平面几何知识外，还可以证明它们在两个相交平面的交线上. 根据公理2，两个相交平面的交线是唯一的，由此可判定这三点在同一条直线上.

例5 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P、Q 分别是正方形 BCC_1B_1 和 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心，求证：直线 AP 和 BQ 为异面直线.

分析 两条直线的位置关系按共面与否来分只有两种：要么共面，要么异面. 因此只要否定了 AP 与 BQ 共面，那么 AP 与 BQ 为异面直线的结论便自然成立，所以本题可用反证法. 证明两条直线异面，还可以利用结论：过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线.

证法1 先证明 AQ 与 BP 是异面直线.

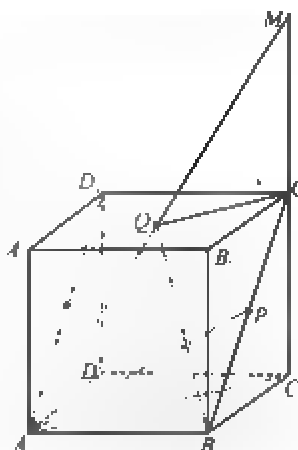
因为 $QC_1 \,/\!/\, AC$，所以 A、C、C_1、Q 四点在同一平面上.

如图1-5，设直线 AQ 与 CC_1 相交于 M 点，则 $M \in$ 平面 BCC_1B_1. 又 $A \notin$ 平面 BCC_1B_1，$M \notin BP$，且 $BP \subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 AQ 与 BP 是异面直线.



再证明 AP 与 BQ 是异面直线，用反证法.

假设 AP 与 BQ 在同一平面 α 内，则 A、B、P、Q 四点都在平面 α 上，从而 AQ 与 BP 在平面 α 内，这与上面所证明的直线 AQ 与 BP 是异面直线相矛盾. 故 AP 与 BQ 一定是异面直线.

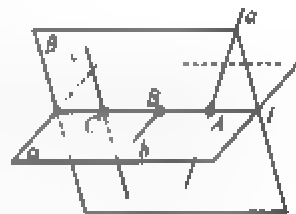

图 1-5

证法 2　如图 1-5，因为 $AP \subset$ 平面 ABC_1D_1，$B \in$ 平面 ABC_1D_1，$B \notin AP$，且 $Q \notin$ 平面 ABC_1D_1，故直线 AP 与 BQ 是异面直线.

评注　本题所给出的两种证法都是判断两条直线是异面直线的基本方法，证法 2 应用了前面所述的一个基本结论，它要将其中一条直线置于一个平面内，而另一条直线必须与这个平面相交，且交点不在第一条直线上.

例 6　若有两两不共面的三条直线，则存在无穷多条直线，它们与已知的三条直线都相交，且其中任何两条直线都不在同一平面内.

分析　要证的结论有两个，一是存在无穷多条直线与已知的三条直线都相交；二是在所存在的无数条直线中，任何两条都不共面. 前者可通过作图来完成，后者需要应用反证法来证明.


图 1-6

证明　如图 1-6，设 a、b、c 为不共面的三条直线，在直线 a 上任取一点 A，过 b 和 A、c 和 A 分别作平面 α、β，则 α 和 β 的交线 l 必过点 A.

因为交线 l 与直线 b、c 都不平行，所以 l 与 b、c 都相交，设交点分别为 B、C，故 l 为所求之直线.

由于 A 是直线 a 上任意一点，故与直线 a、b、c 都相交的直线有无穷多条.

设 A' 是直线 a 上不同于 A 的点，过 A' 作直线 l'，使之与直线 b、c 分别交于 B'、C'.

若直线 l 与 l' 在同一平面 γ 内，则点 B、B'、C、$C' \in \gamma$. 因为 B、$B' \in b$，C、$C' \in c$，所以 b、$c \in \gamma$，这与 b、c 不共面矛盾，故直线 l 与 l' 不共面.

综上所述，与两两不共面的三条直线都相交的直线存在，且有无数多条，其中任何两条都不在同一平面内.

评注　(ⅰ) 在几何中证明存在性问题，往往都是从作图入手；(ⅱ) 证明诸线不共面，通常都是用反证法. 要重视这些证题思路.

例 7　在空间四边形 $ABCD$ 的四条边和两条对角线所在的 6 条直线中，互相垂直的直线最多有几对？(每两条组成一对)

分析　先构造一个空间四边形，使其四条边和两条对角线所在的直线中，有 6 对互



相垂直的直线，再说明对任意一个空间四边形，不存在7对、8对互相垂直的直线，从而说明互相垂直的直线最多有6对.

解 分三步证明最多有6对互相垂直的直线.

(1)6对是可以达到的

如图1-7，在空间四边形$ABCD$中，$AB\perp$平面BCD，$BC\perp BD$.

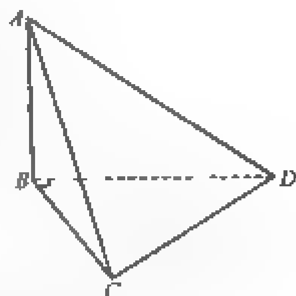


图1-7

由$AB\perp$平面BCD知，$AB\perp BC$，$AB\perp BD$，$AB\perp CD$.又由三垂线定理知，$AD\perp BC$，$AC\perp BD$.再加上$BC\perp BD$，就得到6对互相垂直的直线.

(2)8对是不可能的

由于一个三角形的内角中最多有一个角为直角，最少有两个锐角，所以四个面三角形中至少有8个锐角，又因为6条直线可以组成15对直线，其中至少有8对不互相垂直，所以互相垂直的直线不超过7对.

(3)7对是不可能的.

若不然，有7对互相垂直的直线，因为异面直线只有3对，故至少有4对垂直的直线是共面的，从而空间四边形的4个表面都是直角三角形，且3对成异面直线的对棱也互相垂直.此时，一个顶点在其对面上的射影是该三角形的垂心，而直角三角形的垂心是直角顶点，所以这个空间四边形的一条边(或对角线)与一面垂直，且垂足就是直角三角形的直角顶点，这时这个面三角形的直角顶点所对的面必为锐角三角形，与四个面都是直角三角形矛盾.

综上所述，互相垂直的直线最多有6对.

评注 (3)中用到空间四边形如下两个性质：

(Ⅰ)在空间四边形$ABCD$中，若$AB\perp CD$，$BC\perp AD$，$AC\perp BD$，则点A在面BCD上的射影是$\triangle ABC$的垂心.

(Ⅱ)在空间四边形$ABCD$中，若$AB\perp$面BCD，且$BC\perp BD$，则$\triangle ACD$为锐角三角形.

这两个性质的证明，留给读者去完成.

例8 (第1届国际数学奥林匹克试题)平面α与β相交于直线l，在平面α与β内分别给出不在直线l上的两点A和C.求作一个以AB和CD为两底的等腰梯形$ABCD$，使之能作一内切圆，并要求点B在平面α内，点D在平面β内.

分析 这是一个空间作图问题，需要转化为平面几何问题逐步加以解决.要完成作图，先要考虑作出梯形$ABCD$所在的平面AC，然后在平面AC内，再考虑能容内切圆的等



腰梯形的作图.

解 由分析得到如下作法，如图1-8所示.

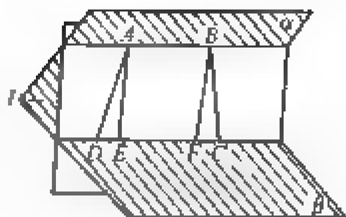


图1-8

(1) 分别在平面 α、β，过点 A 作 $AB \parallel l$，过点 C 作 $CD \parallel l$；

(2) 过两平行直线 AB 和 CD 作平面 AC；

(3) 在平面 AC 内，经过 A 作 $AE \perp CD$，垂足为 E；

(4) 以 A 为圆心，CE 为半径，在平面 AC 内作弧，交直线 CD 于点 D，使 D 位于 CE 的延长线上；

(5) 在射线 AB 上，截取 $AB = CE - DE$；

(6) 在平面 AC 内，连接 AD 和 BC，则平面四边形 $ABCD$ 符合要求.

下面证明这一事实(如图1-8)：

由作法知，点 B、D 分别在平面 α、β 内，且 $AB \parallel CD$，故平面四边形 $ABCD$ 为梯形.

在平面 AC 上，过点 B 作 $BF \perp CD$，垂足为 F，则 $AB = EF$，$AE = BF$. 于是，有

$$BC = \sqrt{BF^2 + CF^2} = \sqrt{AE^2 + (CE - EF)^2}$$
$$= \sqrt{AE^2 + (CE - AB)^2} = \sqrt{AE^2 + DE^2}$$

由作法(5)知，$CE - AB = DE$，所以 $\sqrt{AE^2 + DE^2} = AD$.

因此，梯形 $ABCD$ 是等腰梯形.

又因为 $AD + BC = 2AD = 2CE = CE + (EF + CF) = CE + (AB + DE) = AB + (CE + DE) = AB + CD$，所以等腰梯形 $ABCD$ 必有一内切圆.

事实上，以等腰梯形 $ABCD$ 的对称轴夹在两底间的线段为直径作圆，就是它的内切圆.

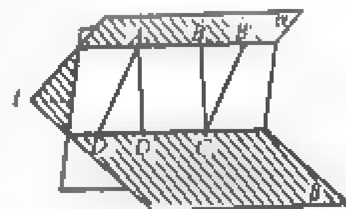


图1-9

上面，对作图无误进行了论证，这里再对作图的个数进行讨论. 由作法(4)知，以点 A 为圆心，CE 为半径在平面 AC 内作弧时有且仅有如下三种情况发生：

情形1 $CE > AE$，弧线与直线 CD 有两个交点 D 和 D'. 此时，不仅有解，且有两解，即两个全等的等腰梯形 $ABCD$ 和 $AB'CD'$，如图1-9所示.

情形2 $CE = AE$，弧线与直线 CD 相切. 此时，只有一解，即 AD 与 AE 重合，梯形变为正方形.

情形3 $CE < AE$，弧线与直线 CD 相离. 此时无解.

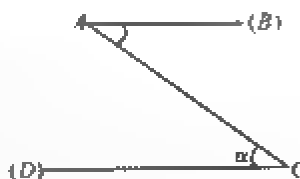
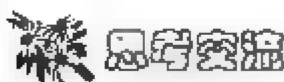


图1-10

评注 本题属定位作图，凡能作出多少个适合条件的图形，不论全等与否，就说有多少个解. 根据题目所给条件，A、C 都是定点，如图1-10，射线 $A(B)$、$C(D)$ 都有确定方向，因而角 α 也



是确定的，所以作图能否完成，也是取决于角α的大小. 事实上，根据角α小于、等于、大于45°这三种情况进行讨论，其结果与上述一致.



思考题1 （1997年全国高中数学联赛试题）如果空间三条直线a、b、c两两成异面直线，那么与a、b、c都相交的直线有 …………………………………………（ ）

A. 0条　　B. 1条　　C. 多于1的有限条　　D. 无穷多条

分析　由三条直线a、b、c两两异面，我们联想到一个平行六面体的12条棱. 这12条棱可分成三组，每组中的4条棱都互相平行，在每一组中各取一条直线，使取出的这三条直线两两异面. 因此，本题可通过构造平行六面体，使问题得到整体解决.

解　无论a、b、c的位置关系是怎样的，总可以作一个平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，使AB在直线a上，B_1C_1在直线b上，DD_1在直线c上，如图1-11所示.

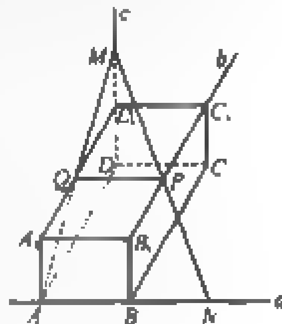


图1-11

再在棱DD_1的延长线上任取一点M，由点M与直线a确定一个平面α，平面α与直线B_1C_1交于点P，与直线A_1D_1交于点Q，则$PQ // a$. 于是，在平面α内，直线MP与a不平行，则MP必与直线a相交，不妨设交点为N. 故这样的直线MN就同时与直线a、b、c都相交.

由于点M的取法有无穷多种，因而同时与a、b、c都相交的直线就有无数多条.

评注　本题的证明步骤主要有两步：一是通过作图说明这样的直线存在，二是说明这样的直线有无数多条.

思考题2　已知：直线a和b是异面直线，直线$c // a$，直线b与c不相交. 求证：直线b和c是异面直线.

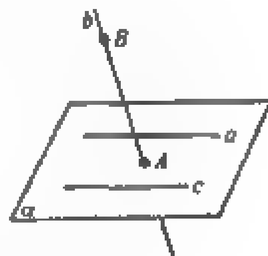


图1-12

证法1　假设b、c不是异面直线，则b与c相交或平行.

因为b与c不相交，所以$b // c$.

又因为$c // a$，所以$a // b$，这与a、b是异面直线相矛盾.

故b与c是异面直线.

证法2　如图1-12，因为$c // a$，所以a与c确定一个平面α.

又b与a是异面直线，所以直线b上必存在一点$B \notin \alpha$（若不然，则$b \subset \alpha$，便与b、a异面矛盾）.



于是，b 与 a 相交或平行.（自然分类）

(1) 若 $b \cap a = A$，则由 b 与 c 不相交知，$A \notin c$，于是，b 与 c 是异面直线.

(2) 若 $b \parallel a$，则 b 与 c 平行或异面.（二次分类）

当 $b \parallel c$ 时，则由 $c \parallel a$，得 $a \parallel b$，与题设矛盾. 于是，只有 b 与 c 异面.

综上所述，直线 b 与 c 是异面直线.

评注 空间两条直线的位置关系，只有相交、平行和异面三种情形，已知两条直线不相交，因此只要否定了这两条直线平行，这两条直线是异面直线的结论就自然成立了. 以上两种证法，都需要否定 $b \parallel c$，常用反证法.

同步检测 1

一、选择题

1. 如果平面 α 与另外两个平面 β、γ 都相交，那么这三个平面的交线的条数是 …………（ ）

   A. 2　　　B. 3　　　C. 2 或 3　　　D. 1 或 2 或 3

2. 已知一直线和直线外不共线的三点，且其中只有两个点所连直线与已知直线在同一平面内，那么这条直线和直线外三点可确定平面的个数是 …………（ ）

   A. 3　　　B. 4　　　C. 5　　　D. 7

3. 设 D 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点，点 E、F、G、H 分别在线段 AB、BC、CD、DA 上，且直线 EF 与 HG 相交于点 P，则点 P …………（ ）

   A. 一定在直线 AC 上

   B. 一定在直线 BD 上

   C. 可能在直线 AC 上，也可能在直线 BD 上

   D. 既不在直线 AC 上，也不在直线 BD 上

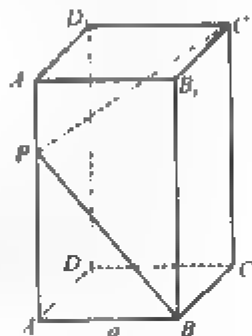


图 1-13

4. 如图 1-13，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是边长为 a 的正方形，若在侧棱 AA_1 上至少存在一点 P，使得 $\angle BPC_1 = 90°$，则该长方体高的最小值为 …………（ ）

   A. a　　　B. $2a$

   C. $3a$　　　D. $4a$

5. 设 a、b 是平面 α 外的两条直线，若 a、b 在平面 α 内的射影是 …………（ ）

   A. 两条相交直线，则 a 和 b 相交

   B. 两条平行直线，则 a 和 b 平行

C. 两条垂直直线，则 a 和 b 垂直

D. 一条直线和这条直线外一点，则 a 和 b 是异面直线

6.（2002年湖南省高中数学奥林匹克试题）在正方体的一个面所在的平面内，任意画一条直线，则与它异面的正方体的棱的条数是 …………（　）

A. 4或5或6或7　　B. 4或6或7或8

C. 6或7或8　　D. 4或5或6

7. 给定下列两个关于异面直线的命题：

命题Ⅰ　若平面 α 上的直线 a 与平面 β 上的直线 b 为异面直线，直线 c 是 α 与 β 的交线，那么 c 至多与 a、b 中的一条相交；

命题Ⅱ　不存在这样的无穷条直线，它们中的任意两条都是异面直线。

那么 …………（　）

A. 命题Ⅰ正确，命题Ⅱ不正确

B. 命题Ⅱ正确，命题Ⅰ不正确

C. 命题Ⅰ和命题Ⅱ都不正确

D. 命题Ⅰ和命题Ⅱ都正确

8. 设 a、b 是互相垂直的两条异面直线，MN 是它们的公垂线段，P 是 MN 上异于 M、N 的一点，A、B 分别是 a、b 上的点，则 $\triangle APB$ 是 …………（　）

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 以上三种情形都有可能

二、填空题

9. 已知空间不共面的四个点，则与这四个点距离相等的平面的个数为________。

10. 两条直线不平行是这两条直线为异面直线的________条件（从"充分不必要"、"必要不充分"、"充要"中选一个填入）

11. 已知 a、b、c 是两两垂直的异面直线，d 是 b、c 的公垂线，那么 d 与 a 的位置关系是________

12. 若直线 l 与平面 α 相交于 O 点，点 A、$B\in l$，点 C、$D\in\alpha$，且 $AC\parallel BD$，则 O、C、D 三点的位置关系是________。

13. 一个水平放置的平面图形的斜二测直观图是一个底角为 45°，腰和较短的底边长均为1的等腰梯形，那么这个平面图形的面积为________。

14. 若三个平面把空间分成6个部分，那么这三个平面的位置关系是

15. 从正方体的12条棱和各面的12条面对角线中选出 n 条，使得其中任意两条线段所在的直线都是异面直线，则 n 的最大值为________。



16 空间中不全在一个平面上的有限点集 M，它具有如下性质：对任意的 $A\in M$、$B\in M$，总有 $C\in M$ 和 $D\in M$，使得直线 AB 和 CD 是彼此平行的两条不同直线，则 M 中点的个数可以是__________。（把你认为正确的序号都填上）

①4 个，②6 个，③10 个

三、解答题

17 过空间一点 P 作不在同一平面内的三条射线 PA、PB、PC，证明：$\angle APB$、$\angle BPC$ 的平分线与 $\angle CPA$ 的邻补角的平分线在同一平面内

18. 设 a、b 是异面直线，点 $P\notin a$，$P\notin b$，问：过 P 点是否可作直线 l 与 a、b 都相交？如果可作，能作多少条？如果不可作，请说明理由。

19 如图 1-14，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AB、DB_1、A_1D_1、CC_1 两两成异面直线。现作一对相交直线 l_1、l_2，使 l_1 与 AB、DB_1 都相交，l_2 与 A_1D_1、CC_1 都相交。求证：这样的相交直线 l_1、l_2 有无穷多对。

图 1-14

20. 空间中有不共面的 n 个($n\geq 4$)点，求证：存在无穷多个平面，恰好通过其中的两个点。

（说明：本题是著名的西尔维斯特(Sylvester)问题。西尔维斯特是19世纪英籍犹太数学家，他很富有想像力，提出过许多猜测，其中虽有错误猜测，但多数猜测是正确的。此问题是1893年提出来的，但是直到1933年，才有人给出解答。最初的解答不但应用了高深的数学知识，而且极为繁琐。若干年后，才有人利用极端原理，给出了一个初等证明。）

第2讲 直线与平面的位置关系

知识点金

1 直线与平面的位置关系

(1) 直线在平面内 即直线上至少有两个点在这个平面上.

(2) 直线在平面外 即直线上最多有一个点在这个平面上.因此,直线在平面外又可分为直线与平面平行(没有公共点)和直线与平面相交(有且仅有一个公共点)两种情况

2. 直线与平面平行

(1) 定义 如果一条直线与一个平面没有公共点,我们就说这条直线与这个平面平行.

(2) 判定 如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行,那么这条直线和这个平面平行.

需要指出的是,两个平面平行的性质定理往往是直线与平面平行的判定定理.

(3) 性质 如果一条直线和一个平面平行,经过这条直线的平面和这个平面相交,那么这条直线和交线平行

需要指出的是,上述线面平行的性质定理实质上是线线平行的一个判定定理.

3 直线与平面垂直

(1) 定义 如果一条直线与一个平面内的任何一条直线都垂直,我们就说这条直线与这个平面垂直

(2) 判定

定理1 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直,那么这条直线垂直于这个平面



定理2 如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面。

需要指出的是，两个平面垂直的性质定理往往是直线和平面垂直的判定定理。

(3) 性质 如果一条直线垂直于一个平面，那么这条直线垂直于这个平面内的任何一条直线

上述线面垂直的性质定理也是线线垂直的一个判定定理。

(4) 三垂线定理及其逆定理 参见第1讲

例题精析

例1 (第15届希望杯数学邀请赛试题)已知两相交平面 α 与 β，直线 $l\perp\alpha$，则( )

A. β 内必存在直线 $m\parallel l$，且必存在直线 $n\perp l$

B. β 内不一定存在直线 $m\parallel l$，且不一定存在直线 $n\perp l$

C. β 内不一定存在直线 $m\parallel l$，但必存在直线 $n\perp l$

D. β 内必存在直线 $m\parallel l$，但不一定存在直线 $n\perp l$

分析 本题可通过正确论证和反面举例相结合的方法做出判断。

解 不妨设 $\alpha\cap\beta=n$，则由 $l\perp\alpha$，可得 $l\perp n$，可见，β 内必存在直线 $n\perp l$。

如果 β 内存在直线 $m\parallel l$，则由 $l\not\subset\beta$，得 $l\parallel\beta$。又 $l\perp\alpha$，所以 $\beta\perp\alpha$，这与 β 和 α 只是相交关系不相符，所以这样的直线 m 不一定存在。

故应选 C。

评注 本题也可以通过作图，排除 A、B、D，从而做出判断

例2 (2003年天津市高中数学联赛试题)已知在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 是 BC 的中点，E 是 AA_1 上的一个动点，且 $\frac{AE}{EA_1}=m$，若 $AD\parallel$ 平面 B_1CE，则 m 的值等于________

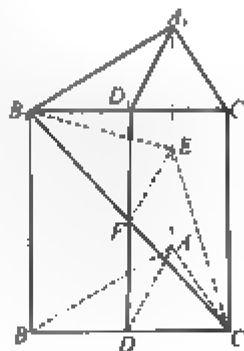


图2-1

分析 可先作出符合题意的示意图。由 $AD\parallel$ 平面 B_1CE 知，平面 B_1CE 中必存在一条直线与 AD 平行，这条直线在何处呢?在立体图形中，直线往往产生于两个相交平面的交线。为此，可从作平面入手。

解 如图2-1，过直线 AD 和 AA_1 作平面，交侧面 BCC_1B_1 于 DD_1，则 D_1 为 B_1C_1 的中点。

设 DD_1 与 B_1C 交于点 F，连接 EF。

因为 AD // 平面 B_1CE，所以 AD // EF.

又因为 DD_1 // BB_1，且 D 为 BC 的中点，所以 F 是 B_1C 的中点，也是 DD_1 的中点.

因为 ADD_1A_1 为平行四边形，所以 E 为 AA_1 的中点，故 $m=\dfrac{AE}{EA_1}=1$.

评注 本题主要考查直线与平面平行的性质，关键是确定平面 ADD_1A_1 与平面 B_1CE 的交线 EF，进而判定点 F 的位置.

例3 如图2-2，$ABCD$ 和 $ABEF$ 是两个全等的正方形，M、N 分别是对角线 AC、BF 上的点，且 $AM=FN$. 求证：MN // 平面 BCE.

分析 要证明 MN // 平面 BCE，只要在平面 BCE 内找到一条直线与 MN 平行即可. 事实上，这样的直线是很多的，下面我们给出两种不同的证法.

证法1 如图2-2，过点 M、N 分别作 MH // AB，NG // AB，与 BC、BE 分别交于点 H、G，连接 GH，则 MH // NG.

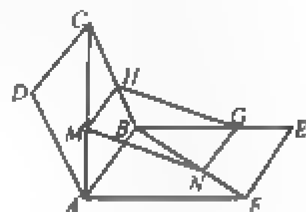


图2-2

因为 $AM=FN$，$AC=FB$，所以 $CM=BN$.

又 $\angle MHC=\angle NGB=90^\circ$，$\angle MCH=\angle NBG$，所以 $Rt\triangle MHC\cong Rt\triangle NGB$，有 $MH=NG$.

所以 $MNGH$ 为平行四边形，NH // HG.

因为 $MN\not\subset$ 平面 BCE，$HG\subset$ 平面 BCE，所以 MN // 平面 BCE.

证法2 如图2-3，连接 AN 并延长交 BE（或延长线）于 P，连接 CP.

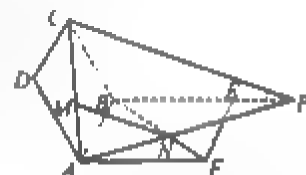


图2-3

在平面 $ABEF$ 内，因为 AF // BP，所以 $\dfrac{AN}{AP}=\dfrac{FN}{FB}$.

因为 $FN=AM$，$FB=AC$，所以 $\dfrac{AN}{AP}=\dfrac{AM}{AC}$.

从而，在平面 ACP 内，有 MN // CP.

又 $MN\not\subset$ 平面 BCE，$CP\subset$ 平面 BCE，所以 MN // 平面 BCE.

评注 (i)在平面 BCE 内，作出直线 GH（或 CP）是证明本题的关键；(ii)解答本题的第一感觉好像应证明 MN // CE，但这是徒劳的.

例4 如图2-4，P 为正方形 $ABCD$ 外一点，且 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PC\perp$ 截面 $AEFG$. 求证：

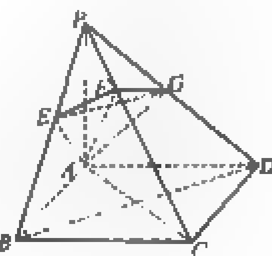


图2-4

(1) $AE\perp PB$，$AG\perp PD$；

(2) $AF\perp EG$.

分析 欲证 $AE\perp PB$，只需证明 $AE\perp$ 平面 PBC 即可. 欲证 $AF\perp EG$，由于 $AF\perp$



BD,所以只需证明 $EG \parallel BD$.

证明 (1) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,所以 AE 在平面 $ABCD$ 上的射影为 AB.

又 $BC \perp AB$,所以 $BC \perp AE$(三垂线定理).

因为 $PC \perp$ 平面 $AEFG$,所以 $PC \perp AE$.

所以 $AE \perp$ 平面 PBC,故 $AE \perp PB$.

同理可证,$AG \perp PD$.

(2) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,所以 AF 在平面 $ABCD$ 上的射影为 AC.

又 $BD \perp AC$,所以 $BD \perp AF$(三垂线定理).

因为 $Rt\triangle PAB \cong Rt\triangle PAD$,$Rt\triangle PFA \cong Rt\triangle PGA$,所以 $PB = PD$,$PE = PG$.

于是,$\frac{PB}{PE} = \frac{PD}{PG}$,有 $EG \parallel BD$.

故 $AF \perp EG$.

评注 (i)在证明线线垂直时,适时应用三垂线定理(或逆定理),可以回避证明线面垂直,缩短证题过程;(ii)对于第(2)小题,关键是证明 $EG \parallel BD$.

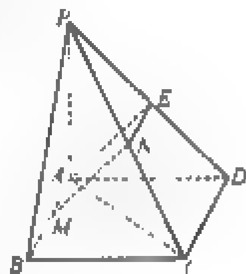


图 2-5

例5 如图2-5,已知 $PA \perp$ 矩形 $ABCD$ 所在平面,M、N 分别是 AB、PC 的中点.

(1) 求证:$MN \parallel$ 平面 PAD;

(2) 求证:$MN \perp CD$;

(3) 若 $\angle PDA = 45°$,求证:$MN \perp$ 平面 PCD.

分析 要证明 $MN \parallel$ 平面 PAD,只需证 MN 平行于平面 PAD 内的某一条直线.这"某一条直线"在何处?注意到 M、N 分别是 AB、PC 的中点,可取 PD 的中点 E,从而只须证明 $MN \parallel AE$ 即可.要证 $MN \perp CD$,可证 $MN \perp AB$.由(1)知,只需证 $AE \perp AB$.对于第(3)小题,由(2)知,$MN \perp CD$,即 $AE \perp CD$,再证 $AE \perp PD$ 即可.

证明 (1) 取 PD 的中点 E,连接 AE、EN,则 $EN \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CD \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB \mathrel{\underline{\parallel}} AM$,故 $AMNE$ 为平行四边形,从而 $MN \parallel AE$.

又 $MN \not\subset$ 平面 PAD,$AE \subset$ 平面 PAD,所以 $MN \parallel$ 平面 PAD.

(2) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,所以 $PA \perp AB$.

又 $AD \perp AB$,所以 $AB \perp$ 平面 PAD.

所以 $AB \perp AE$,即 $AB \perp MN$.

又 $CD \parallel AB$,所以 $MN \perp CD$.

(3) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,所以 $PA \perp AD$.

又 $\angle PDA = 45°$,且 E 为 PD 的中点,所以 $AE \perp PD$,即 $MN \perp AD$.



由(2)知，$MN\perp CD$.

故 $MN\perp$ 平面 PCD.

例6 已知三个平面两两相交，有三条交线，求证：这三条交线交于一点或互相平行.

分析 从已知条件和结论看，三个平面两两相交所得的三条交线，是交于一点还是互相平行，关键取决于其中两条交线是交于一点还是互相平行. 设 $\alpha\cap\beta=a$，$\alpha\cap\gamma=b$，则直线 a、b 都在平面 α 内，因此直线 a 与 b 要么相交，要么平行，由此可分别进行讨论.

证明 设有三个平面 α、β、γ，其中 $\alpha\cap\beta=a$，$\alpha\cap\gamma=b$，$\beta\cap\gamma=c$.

因为 $\alpha\cap\beta=a$，$\alpha\cap\gamma=b$，所以 $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$.

在平面 α 内，直线 a 与 b 相交或平行.

(1) 如果 $a\cap b=P$，如图2-6.

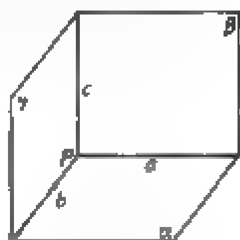


图2-6

因为 $P\in a$，$a\subset\beta$，所以 $P\in\beta$.

又 $P\in b$，$b\subset\gamma$，所以 $P\in\gamma$.

所以 $P\in\beta\cap\gamma=c$.

这说明 a、b、c 交于一点 P.

(2) 如果 $a\parallel b$，如图2-7.

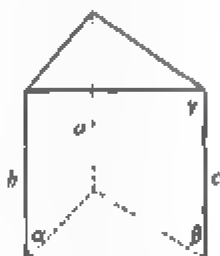


图2-7

因为 $a\not\subset\gamma$，$b\subset\gamma$，且 $a\parallel b$，所以 $a\parallel\gamma$.

又因为 $a\subset\beta$，$\beta\cap\gamma=c$，所以 $a\parallel c$.

从而 a、b、c 互相平行.

综合(1)、(2)知，三条交线 a、b、c 交于一点或互相平行.

评注 本题入手较困难，应从同一平面内的两条直线的位置关系考虑. 证明三条交线 a、b、c 共点于 P 时，已知 $a\cap b=P$，接着应证明 $P\in c$；证明三条交线 a、b、c 互相平行时，已知 $a\parallel b$，先证 a 与包含 b 的平面 γ 平行，再借助于线面平行的性质证明 $a\parallel c$.

例7 如图2-8，已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$.

(1) 证明：$C_1C\perp BD$；

(2) 当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时，能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD？请给出证明.

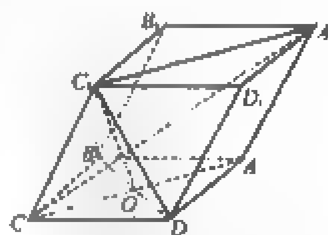


图2-8

分析 对于第(1)小题，需证明 $C_1C\perp BD$，可证明 $BD\perp$ 平面 ACC_1A_1. 若注意到底面 $ABCD$ 为菱形，$BD\perp AC$，也可以证明 C_1C 在底面上的射影为 AC. 对于第(2)小题，由于 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$，$CB=CD$，猜想，当 $\dfrac{CD}{CC_1}=1$ 时，$C-C_1BD$ 为正三棱锥，可使得 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD.



解 (1) **证法1** 连接 AC、A_1C_1，设 AC 和 BD 的交点为 O，连接 C_1O.

因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD \perp AC$，且 $CB = CD$.

又因为 $\angle C_1CB = \angle C_1CD$，$C_1C$ 公用，所以 $\triangle C_1CB \cong \triangle C_1CD$，从而 $C_1B = C_1D$.

因为 O 为 BD 的中点，所以 $BD \perp C_1O$.

于是，$BD \perp$ 平面 ACC_1A_1.

故 $BD \perp C_1C$.

证法2 因为 $\angle C_1CB = \angle C_1CD$，所以点 C_1 在平面 $ABCD$ 上的射影在 $\angle BCD$ 的平分线上.

又因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 CA 平分 $\angle BCD$.

从而，点 C_1 在平面 $ABCD$ 上的射影在 CA 上，即 C_1C 在平面 $ABCD$ 上的射影为 AC.

因为 $BD \perp AC$，所以 $BD \perp C_1C$（三垂线定理）.

(2) 由(1)知，$BD \perp$ 平面 ACC_1A_1，从而 $BD \perp A_1C$.

当 CDD_1C_1 是菱形，即 $\frac{CD}{CC_1} = 1$ 时，CDD_1C_1 和 $ABCD$ 是两个全等的菱形，由 $BD \perp A_1C$ 及对称性知，也有 $C_1D \perp A_1C$.

故 $A_1C \perp$ 平面 C_1BD.

评注 对于第(1)小题，证法2比较简单，它主要应用了课本中一道习题的结论. 对于第(2)小题，首先需要猜想 $\frac{CD}{CC_1} = 1$，然后由四边形 CDD_1C_1 和 $ABCD$ 是两个全等的菱形，根据对称性，由 $BD \perp A_1C$，推知 $C_1D \perp A_1C$，从而证明了 $A_1C \perp$ 平面 C_1BD.

例9 (2006年天津市高考试题) 如图2-9，在五面体 $ABCDEF$ 中，点 O 是矩形 $ABCD$ 两对角线的交点，面 CDE 是等边三角形，棱 $EF \underset{=}{\parallel} \frac{1}{2}BC$.

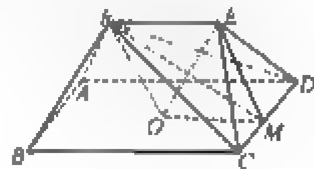


图2-9

(1) 证明：$FO \parallel$ 平面 ECD；

(2) 设 $BC = \sqrt{3}CD$，证明：$EO \perp$ 平面 FCD.

分析 要证明 $FO \parallel$ 平面 ECD，只需在平面 ECD 内找到一条直线，使其平行于 FO. 注意到 O 为矩形 $ABCD$ 的中心，$EF \underset{=}{\parallel} \frac{1}{2}BC$，可取 CD 的中点 M，只需证明 $OMEF$ 为平行四边形即可. 对于第(2)小题，要证明 $EO \perp$ 平面 FCD，只需证 EO 垂直于平面 FCD 内的两条相交直线即可. 由 $EM = \frac{\sqrt{3}}{2}CD$，$OM = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}CD$ 知，$OMEF$ 为菱形，其对角线 $EO \perp FM$ 再通过线面垂直证明 $CD \perp EO$ 即可.

证明 (1) 取 CD 的中点 M，连接 OM、EM



在矩形 $ABCD$ 中，$OM \underline{\parallel} \frac{1}{2}BC$. 又因为 $FE \underline{\parallel} \frac{1}{2}BC$，所以 $FE \underline{\parallel} OM$.

于是，四边形 $OMEF$ 为平行四边形，则 $FO \parallel EM$.

又因为 $FO \not\subset$ 平面 ECD，$EM \subset$ 平面 ECD，所以 $FO \parallel$ 平面 ECD.

(2) 连接 FM，由(1)和已知条件，在等边 $\triangle ECD$ 中，$EM = \frac{\sqrt{3}}{2}CD$. 又 $EF = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}CD$，所以 $EM = EF$.

因此，平行四边形 $OMEF$ 为菱形，从而 $EO \perp FM$.

又因为 $CD \perp OM$，$CD \perp EM$，所以 $CD \perp$ 平面 $OMEF$，从而 $CD \perp EO$.

故 $EO \perp$ 平面 FCD.

评注 五面体对于考生来说并不是很熟悉，但本题所用到的知识和方法都是很基本的，主要考查直线与平面平行和垂直的判定.

思考交流

思考题1 如图2-10，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB = 90^\circ$，$\angle BAC = 30^\circ$，$BC = 1$，$AA_1 = \sqrt{6}$，M 是棱 CC_1 的中点. 求证：$AM \perp A_1B$.

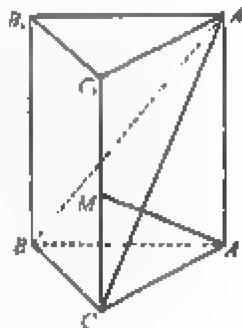


图2-10

分析 有两种思路：一是注意到 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1，A_1C 是直线 A_1B 在平面 ACC_1A_1 上的射影，只需证明 $AM \perp A_1C$ 即可. 在同一平面内证明两条直线垂直，可利用平面几何知识，也可用解析法. 二是考虑到题目所给定理性条件较多，可考虑通过计算证明异面直线 AM 与 A_1B 所成的角为90°.

证法1 因为 $\angle ACB = 90^\circ$（即 $BC \perp AC$），$BC \perp CC_1$，所以 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1，A_1C 是 A_1B 在平面 ACC_1A_1 上的射影，因此只需证明 $AM \perp A_1C$.

如图2-11，设 AM 与 A_1C 的交点为 N.

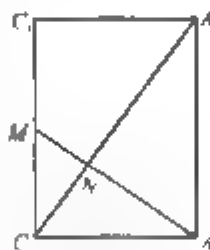


图2-11

在 Rt$\triangle ACM$ 和 Rt$\triangle CC_1A_1$ 中，$AC = A_1C_1 = \sqrt{3}$，$CC_1 = \sqrt{6}$，$MC = \frac{\sqrt{6}}{2}$，则 $\frac{AC}{CC_1} = \frac{MC}{A_1C_1} = \sqrt{2}$

所以 Rt$\triangle ACM \cong$ Rt$\triangle CC_1A_1$，有 $\angle AMC = \angle CA_1C_1$



从而 M、N、A_1、C_1 四点共圆.

所以 $\angle MNA_1 = 180^\circ - \angle MC_1A_1 = 90^\circ$，即 $AM \perp A_1C$.

故 $AM \perp A_1B$.

证法 2 由证法 1 知，只需证明 $AM \perp A_1C$.

建立直角坐标系如图 2-12 所示，则 $C(0,0)$、$A(\sqrt{3},0)$、$A_1\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$、$M\left(0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

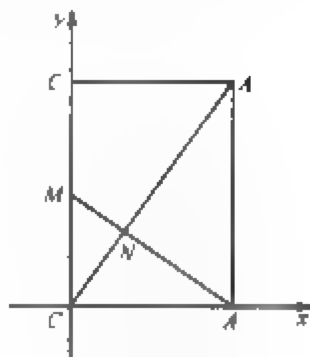


图 2-12

因为 $K_{AM} \cdot K_{A_1C} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}-0}{0-\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}-0}{\sqrt{3}-0} = -1$，

所以 $AM \perp A_1C$.

故 $AM \perp A_1B$.

证法 3 如图 2-13，延长 BA 到 D，使 $AD = AB$，使 $DD_1 \underline{\mathbin{/\!/}} AA_1$，连 A_1D_1、AD_1、D_1M、C_1D_1，则 $D_1M \mathbin{/\!/} A_1B$，所以 $\angle D_1AM$ 为异面直线 AM 与 A_1B 所成的角.

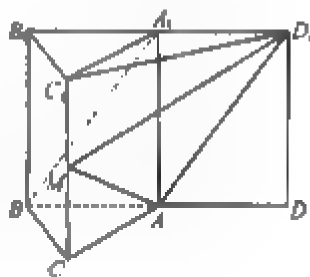


图 2-13

因为 $AM^2 = AC^2 + CM^2 = (\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$，

$AD_1^2 = A_1B^2 = AB^2 + AA_1^2 = 2^2 + (\sqrt{6})^2 = 10$，

$$D_1M^2 = C_1M^2 + C_1D_1^2 = C_1M^2 + (A_1C_1^2 + A_1D_1^2 - 2A_1C_1 \cdot A_1D_1\cos150^\circ)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2\cos150^\circ$$

$$= \frac{29}{2}.$$

所以 $AM^2 + AD_1^2 = \frac{29}{2} = D_1M^2$，则 $AM \perp D_1A$.

故 $AM \perp A_1B$.

评注 本题主要体现了等价转化的数学思想.其中前两种证法都是将其转化为在同一平面内证明两条直线垂直，这是解决立体几何问题的一种基本思路.证法 3 是将证明两条异面直线垂直转化为计算它们所成的角为 90°，这也是证明线线垂直的一种常用技巧.当然，本题还可以通过建立空间直角坐标系，利用向量的方法来证明.

思考题 2 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 60^\circ$，P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点，且 $PA = PB = PC$，$\angle APB = \angle APC = 90^\circ$.

(1) 求证：$PB \perp$ 平面 PAC；

(2) 若 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，求证：H 是 P 点在平面 ABC 上的射影；

(3) 若 G_1、G_2 分别是 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PBC$ 的重心，求证：$G_1G_2 \parallel$ 平面 PAC.

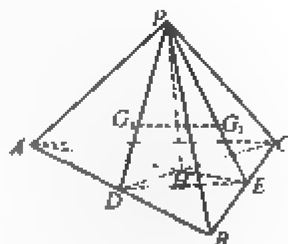


图 2-14

分析　如图 2-14，要证明 $PB \perp$ 平面 PAC，由于 $PB \perp PA$，所以只需证明 $PB \perp PC$ 或 $PB \perp AC$ 即可. 对于(2)，只需证明 $PH \perp$ 平面 ABC 即可. 对于(3)，要证明 $G_1G_2 \parallel$ 平面 PAC，只要证明 $G_1G_2 \parallel AC$ 即可.

证明　(1) 因为 $PA \perp PB$，$PA \perp PC$，所以 $PA \perp$ 平面 PBC.

又因为 $PB = PC$，所以 $AB = AC$(射影相等，则斜线相等).

因为 $\angle BAC = 60^\circ$，所以 $AB = BC = AC$.

所以 $\triangle PAB \cong \triangle PBC$，有 $\angle BPC = \angle BPA = 90^\circ$，即 $PB \perp PC$.

故 $PB \perp$ 平面 PAC.

(2) 连接 AH 并延长交 BC 于 E，则 $AE \perp BC$，且 E 为 BC 的中点.

因为 $PB = PC$，所以 $PE \perp BC$.

所以 $BC \perp$ 平面 PAE.

因为 $PH \subset$ 平面 PAE，所以 $BC \perp PH$.

同理可证，$AB \perp PH$.

故 $PH \perp$ 平面 ABC，即 H 为 P 在平面 ABC 上的射影.

(3) 连接 CH 并延长交 AB 于 D，则 D 为 AB 的中点.

因为 G_1、G_2 分别是 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PBC$ 的重心，所以 $\dfrac{PG_1}{G_1D} = \dfrac{PG_2}{G_2E} = 2$，则 $G_1G_2 \parallel DE$.

又因为 $DE \parallel AC$，所以 $G_1G_2 \parallel AC$.

因为 $G_1G_2 \not\subset$ 平面 PAC，$AC \subset$ 平面 PAC，故 $G_1G_2 \parallel$ 平面 PAC.

评注　由 $PA = PB = PC$ 知，点 P 在平面 ABC 上的射影 H' 为 $\triangle ABC$ 的外心，又易知 $\triangle ABC$ 为等边三角形，且 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，所以 H 也是 $\triangle ABC$ 的外心，故点 H' 与 H 重合，故 $PH \perp$ 平面 ABC.

同步检测 2

一、选择题

1. 已知 a、b 是两条相交直线，其中 $a \parallel$ 平面 α，则 b 与平面 α 的位置关系是（　）

   A. $b \parallel \alpha$　　　　B. b 与 α 相交

   C. $b \subset \alpha$　　　　D. $b \parallel \alpha$ 或 b 与 α 相交



2. 如果一个n面体($n\geqslant 4$)共有m个面是直角三角形，那么称这个n面体的直度为$\frac{m}{n}$。如图2-15，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，四面体D_1-ABD的直度是 …………………… ( )

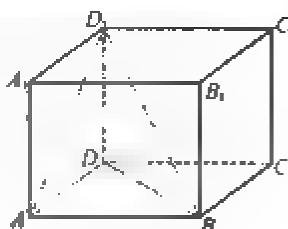


图2-15

A. 1　　B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

3. 关于直线a、b和平面α，有下列四个命题：

①$\left.\begin{matrix}a // b\\ a\perp \alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow b\perp \alpha$；　　②$\left.\begin{matrix}a\perp b\\ a // \alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow b\perp \alpha$；

③$\left.\begin{matrix}a\perp \alpha\\ b\perp \alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a // b$；　　④$\left.\begin{matrix}a\perp b\\ a\perp \alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow b // \alpha$；

其中正确的命题是 …………………………………………………… ( )

A. ①、②　　B. ①、③　　C. ①、②、③　　D. ②、③、④

4. 以下命题正确的是 …………………………………………………… ( )

A. a、b是异面直线，过a必能作一个平面与直线b垂直

B. 异面直线a、b分别在平面α、β内，若$\alpha // \beta$，则$b // \alpha$

C. 两个平面斜交，则其中一个平面内的任意一条直线与另一个平面都不垂直

D. 与两条异面直线都平行的平面仅有一个

5. 如果PA垂直于矩形$ABCD$所在的平面，那么以P、A、B、C、D五个点中的三点为顶点的直角三角形的个数是 …………………………………… ( )

A. 5　　B. 7　　C. 9　　D. 10

6. 在正方形$ABCD$中，E、F分别是AB、BC边的中点，M是EF的中点，现在沿DE、DF及EF分别把$\triangle DAE$、$\triangle DCF$及$\triangle BEF$折起，使A、B、C三点重合于点P，这样，下列结论正确的是 …………………………………………………… ( )

A. $DM\perp$平面BEF　　B. $PM\perp$平面DEF

C. $PE\perp$平面DEF　　D. $PD\perp$平面PEF

7. 已知四边形$ABCD$在平面α内，平面α外的一点到四边形$ABCD$的四个顶点的距离相等，那么，四边形$ABCD$是 …………………………………… ( )

A. 圆的内接四边形　　B. 圆的外切四边形

C. 正方形　　D. 任意凸四边形

8. 如图2-16，用一个平面截正方体的一个角，截面为$\triangle ABC$，过顶点P作$PO\perp$平面ABC，垂足为O，记$M=\frac{1}{PA^2}+\frac{1}{PB^2}+\frac{1}{PC^2}$，$N=\frac{1}{PO^2}$，则$M$与$N$



的大小关系是 ……………………………（ ）

A. $M>N$　　B. $M=N$

C. $M<N$　　D. M、N的大小关系不确定

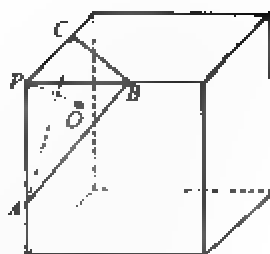


图2-16

二、填空题

9. 在空间四边形$ABCD$中，$AB\perp CD$，$BC\perp DA$，那么对角线AC与BD的位置关系是______.

10. 如图2-17，在矩形$ABCD$中，$AB=1$，$BC=a$，P为平面$ABCD$外一点，且$PA\perp$平面$ABCD$. 若在BC边上至少存在一点Q，使得$PQ\perp DQ$，则正数a取值的集合是______.

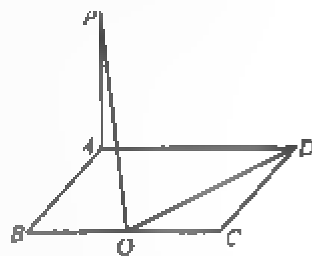


图2-17

11. 已知平面α与平面β交于直线l，P是空间一点，$PA\perp\alpha$，$PB\perp\beta$，垂足分别为A、B，且$PA=1$，$PB=2$. 若点A在β内的射影与点B在α内的射影重合，则点P到直线l的距离为______.

12. 设P为$\triangle ABC$所在平面外一点，若点P在平面ABC上的射影是$\triangle ABC$的垂心，那么点A在平面PBC上的射影是$\triangle PBC$的______心.

13. 如图2-18，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，P为平面ABC外一点，且$PA\perp$平面ABC，$AM\perp PC$，垂足为M，若N为线段PB内任意一点，则$\triangle AMN$的形状是______.

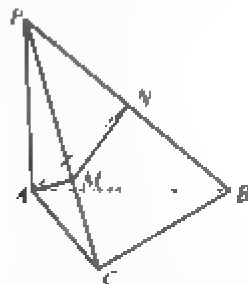


图2-18

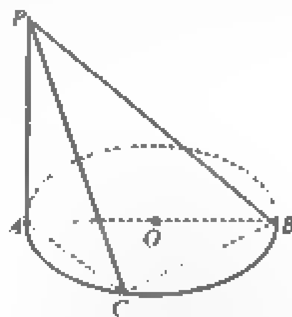


图2-19

14. 如图2-19，AB是$\odot O$的直径，C是圆周上异于A、B的任意一点，PA垂直于$\odot O$所在的平面，则$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCA$和$\triangle ABC$这四个三角形中，直角三角形的个数是______.

15. 过平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$任意两条棱的中点作直线，其中与平面BDD_1B_1平行的直线共有______条.



16. 如图2-20，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别是面对角线 AB_1、BC_1 上的点，且 $AM=BN$，给出如下四个结论：

①$AA_1 \perp MN$；

②$A_1C_1 \parallel MN$；

③$MN \parallel$ 平面 $ABCD$；

④MN 与 A_1C_1 是异面直线.

其中所有正确结论的序号是________.

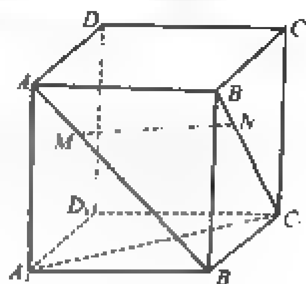


图2-20

三、解答题

17. 已知 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，$PA \perp$ 平面 ABC，点 A 在平面 PBC 上的射影为 H，求证：H 不可能为 $\triangle PBC$ 的垂心.

18. 如图2-21，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AC \perp BC$，P 为平面 $ABCD$ 外一点，$PC \perp$ 平面 $ABCD$，E 为 PD 的中点.

(1) 求证：$AC \perp PB$；

(2) 求证：$PB \parallel$ 平面 ACE.

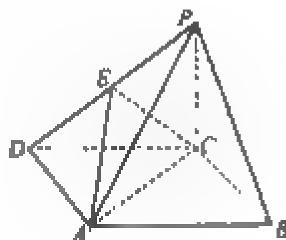


图2-21

19. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=a$，$BB_1=b(a \leqslant b)$，E 是棱 CC_1 上一点，且 $BE \perp B_1C$，A_1C 交平面 BDE 于 F.

(1) 求证：$A_1C \perp$ 平面 BDE；

(2) 若 $CF=\frac{1}{4}A_1C$，求 $\frac{b}{a}$ 的值.

20. 如图2-22，P 为正方形 $ABCD$ 所在平面外一点，且 P 点在平面 $ABCD$ 上的射影 O 恰好是正方形 $ABCD$ 的中心，已知 E、F、G 分别是 PB、PC、PD 上的点，且 $\frac{PE}{PB}=\frac{2}{3}$，$\frac{PF}{PC}=\frac{1}{2}$，$\frac{PG}{GD}=2$，求证：$PA \parallel$ 平面 EFG.

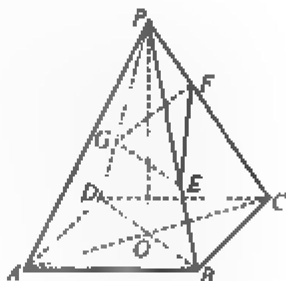


图2-22

第3讲 平面与平面的位置关系

知识点金

1. 平面与平面的位置关系

(1) 两个平面平行　即两个平面没有公共点.

(2) 两个平面相交　即两个平面至少有一个公共点.由公理2知,这两个平面有且仅有一条经过公共点的直线,这条直线叫做这两个相交平面的交线.

2. 两个平面平行

(1) 判定

定理1　如果一个平面内的两条相交直线和另一个平面平行,那么这两个平面平行.

定理2　垂直于同一条直线的两个平面平行.

(2) 性质

定理1　如果两个平面平行,那么其中一个平面内的任意一条直线都和另一个平面平行.

定理2　如果一个平面和两个平行平面相交,那么所得两条交线平行.

值得注意的是,上述两个性质定理分别是线面平行和线线平行的判定定理.

3. 两个平面垂直

(1) 定义　如果两个平面所成的二面角是直角,我们就说这两个平面互相垂直.

关于二面角大小的计算,我们将在后面进行专题讲座

(2) 判定

定理1　如果一个平面经过另一个平面的一条垂线,那么这两个平面互相垂直.

定理2　如果一个平面垂直于两个平行平面中的一个,那么它也垂直于另一个.



(3) 性质

定理1 如果两个平面垂直,那么在一个平面内垂直于它们交线的直线也垂直于另一个平面.

定理2 如果两个平面垂直,那么过一个平面内一点垂直于另一个平面的直线必垂直于它们的交线.

定理3 如果两个相交平面垂直于第三个平面,那么它们的交线垂直于第三个平面.

值得注意的是,上述性质定理分别是线面垂直和线线垂直的判定定理.



例题精析

例1 (1999年广西高中联赛预赛试题)设四棱锥 $P-ABCD$ 的底面不是平行四边形,现用平面去截此四棱锥,得到截面四边形 $A'B'C'D'$.设集合 $S=\{$四边形 $A'B'C'D'$ 是平行四边形$\}$,则 ( )

A. S 是无穷集合 B. S 是单元素集合

C. S 为空集 D. S 的元素个数无法确定

分析 可考虑用极端原理先作出一个平面 α,再作截面 $A'B'C'D'$,使之与平面 α 平行,再证明截面四边形 $A'B'C'D'$ 是平行四边形,再说明这样的截面有无穷多个.

解 如图3-1,设平面 $PAB\cap$ 平面 $PCD=l_1$,平面 $PBC\cap$ 平面 $PDA=l_2$,直线 l_1 与 l_2 所确定的平面为 α.

当截面 $A'B'C'D'$ 与 α 平行时,有 $A'B'\parallel l_1\parallel C'D'$,$B'C'\parallel l_2\parallel D'A'$,从而得知,四边形 $A'B'C'D'$ 是平行四边形.可见,所求的平行四边形截面是存在的.

由于与平面 α 平行的截面有无穷多个,故 S 是无穷集合,应选A.

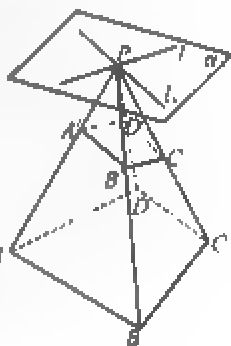


图3-1

评注 解答本题有两个关键点,一是由直线 l_1 和 l_2 确定平面 α,二是根据两平面平行的性质确定四边形 $A'B'C'D'$ 是平行四边形.

例2 关于直线 m、n 与平面 α、β,有下列四个命题:

① 若 $m\parallel\alpha$,$n\parallel\beta$ 且 $\alpha\parallel\beta$,则 $m\parallel n$;

② 若 $m\perp\alpha$,$n\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$,则 $m\perp n$;

③ 若 $m\parallel\alpha$,$n\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$,则 $m\parallel n$;

④ 若 $m\perp\alpha$,$n\parallel\beta$ 且 $\alpha\parallel\beta$,则 $m\perp n$.

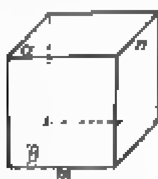
其中所有真命题的序号是________.

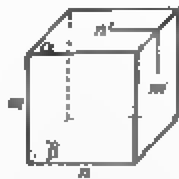
分析 根据题目的特点,可利用正方体这个基本模型进行思考和判断

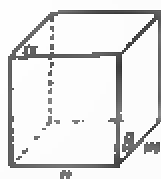


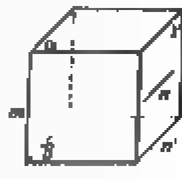
解 如图3-2，$\alpha // \beta$，$m // \alpha$，$n // \beta$，但m与n不平行，所以①命题不正确.

如图3-3，设$\alpha \cap \beta = l$，在l上任取一点O，在平面α内过O点作$n' // l$，在平面β内，过O点作$m' \perp l$.因为$\alpha \perp \beta$，所以$n' \perp \beta$，$m' \perp \alpha$.又$m \perp \alpha$，$n \perp \beta$，所以$m' // m$，$n' // n$，则m与n所成的角为m'与n'所成的角.因为$m' \perp \alpha$，$n' \subset \alpha$，所以$m' \perp n'$，从而$m \perp n$，故命题②正确.


图3-2


图3-3


图3-4


图3-5

如图3-4，$m // \alpha$，$n \perp \beta$，$\alpha \perp \beta$，但m与n相交，所以命题③不正确.

如图3-5，因为$n // \beta$，所以过n作平面γ使$\gamma \cap \beta = n'$，则$n // n'$.又$m \perp \alpha$，$\alpha // \beta$，所以$m \perp \beta$，从而$m \perp n'$，故$m \perp n$，即命题④正确.

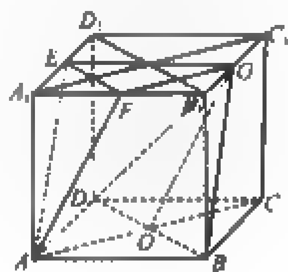
综上所述，命题②、④正确.

评注 在几何中，借助于基本图形判断命题的真假是一种常用方法，应予以重视.

例3 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E、F、G分别是D_1A_1、A_1B_1、B_1C_1的中点，求证：平面$AEF //$平面GBD.

分析 要证明平面$AEF //$平面GBD，只要证明平面AEF内的两条相交直线都平行于平面GBD即可.

证法1 如图3-6，设$AC \cap BD = O$，连接OG、FG.


图3-6

因为F、G分别是A_1B_1、B_1C_1的中点，所以$FG // A_1C_1$，且$FG = \frac{1}{2}A_1C_1$.

又因为$OA // A_1C_1$，且$OA = \frac{1}{2}A_1C_1$，所以$FG \mathrel{\underline{\parallel}} OA$，故$OAFG$是平行四边形.所以$AF // OG$，从而$AF //$平面$GBD$.

因为E、F分别是D_1A_1、A_1B_1的中点，所以$EF // B_1D_1 // BD$，从而$EF //$平面GBD.

又$AF \cap EF = F$，所以平面$AEF //$平面GBD.

证法2 如图3-6，连接EG.

因为E、G分别是D_1A_1、B_1C_1的中点，所以$EG \mathrel{\underline{\parallel}} AB$，故四边形$ABGE$是平行四边形，有$AE // BG$，从而$AE //$平面$GBD$.

又因为E、F分别是D_1A_1、A_1B_1的中点，所以$EF // B_1D_1 // BD$，有$EF //$平面GBD



因为 $AE \cap EF = E$，所以平面 AEF // 平面 GBD.

评注 证明两个平面平行时，一般都是证明一个平面内明显给出的两条相交直线与另一个平面平行，所以第二种证法既显得自然，又比较简单. 第一种证法需要作辅助线 OG，通过证明 $OAFG$ 是平行四边形来证明 AF // OG，这是证明本题的关键，也是一个难点.

例4 如图3-7，$\triangle ABC$ 是正三角形，$PA \perp$ 平面 ABC，QC // PA，且 $PA = AB = 2QC$，M 是 PB 的中点，求证：

(1) $PQ = BQ$；

(2) 平面 $QMC \perp$ 平面 PAB；

(3) 平面 $PQB \perp$ 平面 PAB

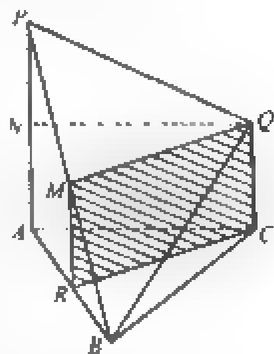


图 3-7

分析 对于第(1)小题，若取 PA 的中点 N，只需证明 $\triangle PNQ \cong \triangle QCB$；若注意到 M 为 PB 的中点，也可以证明 $QM \perp PB$. 对于第(2)小题，要证明平面 $QMC \perp$ 平面 PAB，只要证明 $QM \perp$ 平面 PAB 即可. 对于第(3)小题，要证明平面 $PQB \perp$ 平面 PAB，仍需证明 $QM \perp$ 平面 PAB.

证明 (1) 如图3-7，设 N 为 PA 的中点，连接 QN，则 $QN \perp PA$，从而 $\angle PNQ = \angle QCB = 90°$.

因为 $PN = \frac{1}{2}PA = QC$，$NQ = AC = BC$，所以 $Rt\triangle PNQ \cong Rt\triangle QCB$.

故 $PQ = BQ$

(2) 设 R 为 AB 的中点，连接 MR、CR，则 MR // PA // QC，所以 MR 与 QC 所确定的平面即为平面 QMC.

因为 $PA \perp$ 平面 ABC，所以 $PA \perp CR$.

又因为 $AB \perp CR$，所以 $CR \perp$ 平面 PAB.

因为 $CR \subset$ 平面 $MQCR$，所以平面 $MQCR \perp$ 平面 PAB，即平面 $QMC \perp$ 平面 PAB.

(3) 因为 $CR \perp$ 平面 PAB，QM // CR，所以 $QM \perp$ 平面 PAB.

又因为 $QM \subset$ 平面 PQB，所以平面 $PQB \perp$ 平面 PAB.

评注 在证明 $PQ = BQ$ 时，也可以先证 $PQ = AQ$，再由 $AC = BC$ 及 $CQ \perp$ 平面 ABC，得 $AQ = BQ$（射影相等，则斜线相等）从而有 $PQ = BQ$.

例5 α、β、γ 表示三个不同的平面，如果 $\beta \perp \alpha$，$\gamma \perp \alpha$，且 $\beta \cap \gamma = l$，那么 $l \perp \alpha$

分析 本题用文字语言写出来，即为"如果两个相交平面垂直于同一个平面，那么它们的交线垂直于这个平面." 证明线面垂直，可有多种思路 (1) 证明 l 与平面 α 内两条相交直线垂直；(2) 证明 l 与平面 α 的某一条垂线平行；(3) 证明 l 与平面的某一个平行平面垂直；(4) 用同一法；(5) 用反证法.



证法1　如图3-8，在平面α内任取一点P，过P分别作$PM\perp AB$，$PN\perp CD$，垂足分别为M、N，其中AB、CD分别是平面β、γ与平面α的交线，则$PM\perp\beta$，$PN\perp\gamma$。

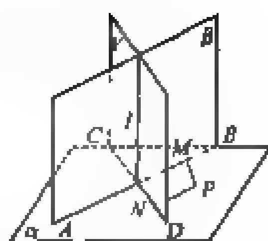


图3-8

从而$PM\perp l$，$PN\perp l$。

又因为$PM\subset\alpha$，$PN\subset\alpha$，且$PM\cap PN=P$，所以$l\perp\alpha$。

证法2　如图3-9，在直线l上任取一点P，过P作$PQ\perp\alpha$，垂足为Q。

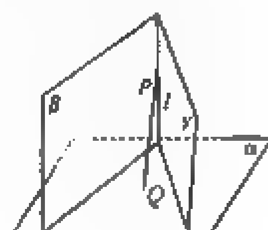


图3-9

因为$\beta\perp\alpha$，所以$PQ\subset\beta$。

同理可证，$PQ\subset\gamma$。

所以$\beta\cap\gamma=PQ$。

又因为$\beta\cap\gamma=l$，所以PQ与l重合。

故$l\perp\alpha$。

证法3　假设直线l与平面α不垂直，在直线l上任取一点P，过P分别作$PM\perp AB$、$PN\perp CD$，垂足分别为M、N，其中AB、CD分别是β、γ与α的交线，图略。

因为$\beta\perp\alpha$，$PM\subset\beta$，所以$PM\perp\alpha$。

同理可证，$PN\perp\alpha$。

这与"过平面外一点有且只有一条直线与这个平面垂直"相矛盾。

故$l\perp\alpha$。

评注　证法2实质上是同一法。

例6　如图3-10，在正三棱锥$P-ABC$中，三条侧棱PA、PB、PC两两垂直，G是$\triangle PAB$的重心，E、F分别是棱BC、PB上的点，且$\frac{BE}{EC}=\frac{PF}{FB}=\frac{1}{2}$。

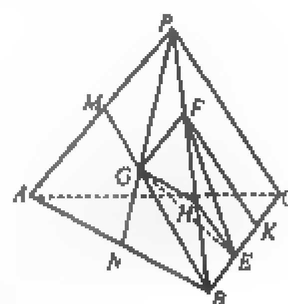


图3-10

(1) 求证：平面$EFG\perp$平面PBC；

(2) 证明：EG是异面直线BC和PG的公垂线。

分析　要证明平面$EFG\perp$平面PBC，只需证明平面EFG经过平面PBC的一条垂线即可。注意到$AP\perp$平面PBC，所以可考虑证明$FG\parallel PA$，这不难由题设条件得到。欲证GE是异面直线PG和BC的公垂线，只需证明$GE\perp PG$，$GE\perp BC$，这都可以利用三垂线定理得到证明。

证明　(1) 连接BG并延长交PA于M。

因为G为$\triangle PAB$的重心，且$\frac{PF}{FB}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{MG}{GB}=\frac{1}{2}=\frac{PF}{FB}$，所以$FG\parallel PA$。

又因为$PA\perp PB$，$PA\perp PC$，所以$PA\perp$平面PBC。



从而 $FG \perp$ 平面 PBC.

故平面 $EFG \perp$ 平面 PBC.

(2) 过 F 作 $FK // PC$ 交 BC 于 K 点，则 $\frac{CK}{KB} = \frac{PF}{FB} = \frac{1}{2}$.

所以 $BE = EK = KC$，从而 $FB = FK = \frac{2}{3}PC$.

于是 $FE \perp BK$

又因为 $GF \perp$ 平面 PBC，所以 $BC \perp GE$（三垂线定理）

延长 PG 交 AB 于 N，过 E 作 $EH // PC$ 交 PB 于 H.

因为 $CP \perp PA$，$CP \perp PB$，所以 $CP \perp$ 平面 PAB.

从而 $EH \perp$ 平面 PAB

因为 $\frac{BH}{HP} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2} = \frac{CP}{NC}$，所以 $GH // NB$.

又因为 $NB \perp PG$，所以 $GH \perp PG$.

于是 $PG \perp GE$（三垂线定理）.

从而 GE 与 PG、BC 都垂直且相交.

故 GE 是异面直线 PG 和 BC 的公垂线

评注 第(1)小题比较简单，第(2)小题的关键是作辅助线，利用平行线和三角形重心的性质，借助于三垂线定理，证明 $GE \perp PG$，$GE \perp BC$.

例 7 如图 3-11，已知平面 $\alpha //$ 平面 β，线段 AB 分别交 α、β 于 M、N，线段 AD 分别交 α、β 于 C、D，线段 BF 分别交 α、β 于 F、E. 若 $AM = m$，$BN = n$，$MN = p$，且 $\triangle MCF$ 的面积为 $(m+p)(n+p)$，求 $\triangle NDE$ 的面积.

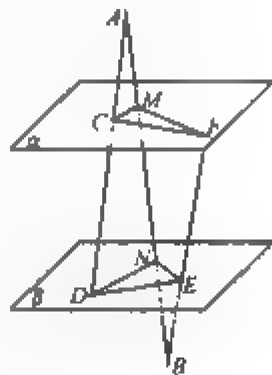


图 3-11

分析 因为 $\alpha // \beta$，平面 $ADN \cap \alpha = MC$，平面 $ADN \cap \beta = DN$，所以 $CM // DN$，同理 $MF // NE$. 从而 $\angle CMF$ 和 $\angle DNE$ 相等或互补，故 $\frac{S_{\triangle MCF}}{S_{\triangle NDE}} = \frac{MC \cdot MF}{ND \cdot NE}$，再将线段的比用 m、n、p 表示即可.

解 因为 $\alpha // \beta$，平面 $ADN \cap \alpha = MC$，平面 $ADN \cap \beta = DN$，所以 $MC // ND$

同理可证 $MF // NE$.

从而 $\angle CMF = \angle DNE$，或 $\angle CMF = 180° - \angle DNE$.

故 $\frac{S_{\triangle MCF}}{S_{\triangle NDE}} = \frac{MC \cdot MF}{ND \cdot NE}$.

因为 $MC // ND$，所以 $\frac{MC}{ND} = \frac{AM}{AN} = \frac{m}{m+p}$.

同理可证$\dfrac{MF}{NE}=\dfrac{BM}{BN}=\dfrac{n+p}{n}$.

故$\dfrac{S_{\triangle MEF}}{S_{\triangle NDE}}=\dfrac{m(n+p)}{n(m+p)}$.

又因为$S_{\triangle MEF}=(m+p)(n+p)$,所以有$S_{\triangle NDF}=\dfrac{n(m+p)}{m(n+p)}\cdot(m+p)(n+p)=\dfrac{n}{m}(m+p)^2$.

评注 立体几何中的计算问题,一般可分为两个逻辑段落,一是通过论证将空间问题转化为平面图形问题;二是利用平面几何知识进行计算.

例8 在四面体$ABCD$中,$AB=AC=AD$,$\angle BAC=\alpha$,$\angle CAD=\beta$,$\angle DAB=\gamma$,且$\cos\beta+\cos\gamma=1+\cos\alpha$.

(1) 求证:平面$ABC\perp$平面BCD;

(2) 设AB中点为M,点A在平面BCD上的射影为O,点O在BD上的射影为N,求证:平面OMN // 平面CAD.

分析 这是一道立体几何与三角的综合题,可从判断$\triangle BCD$的形状入手.注意到题设等式中涉及到角α、β、γ的余弦,所以可利用余弦定理,将三角函数关系转化为线段长的关系.

证明 (1) 设$AB=AC=AD=a$,由$\cos\alpha+\cos\beta=1+\cos\gamma$及余弦定理,得

$$\frac{2a^2-CD^2}{2a^2}+\frac{2a^2-DB^2}{2a^2}=1+\frac{2a^2-BC^2}{2a^2}.$$

化简得$CD^2+DB^2=BC^2$.

从而$\triangle BCD$为直角三角形,且$\angle BDC=90^\circ$.

因为$AB=AC=AD$,所以点A在平面BCD上的射影O为$\triangle BCD$的外心,即O为斜边BC的中心.

又因为$AO\subset$平面ABC,所以平面$ABC\perp$平面BCD.

(2) 因为$ON\perp BD$,$CD\perp BD$,所以ON // CD.

从而ON // 平面CAD.

又因为O、M分别为BC、AB的中心,所以OM // PC

从而OM // 平面CAD.

因为$OM\cap ON=O$,所以平面OMN // 平面CAD

评注 证明本题的关键有两个:一是由题设条件及余弦定理判定$\triangle BCD$的形状;二是利用三角形中位线的性质证明平面OMN内两条相交直线与平面CAD内两条相交直线分别平行





思考交流

思考题1 已知a和b是两条异面直线，求证：过a且平行于b的平面α必平行于过b且平行于a的平面β.

分析 因为平面α内的直线$a /\!/ \beta$，所以要证明$\alpha /\!/ \beta$，只要在平面α内找一条直线，使这条直线与平面β平行且与直线a相交即可．当然，此题还可以用反证法证明．

证法1 在直线a上任取一点A，则直线b和点A确定一个平面γ，设$\gamma \cap \alpha = b'$，则$A \in b'$.

因为$b /\!/ \alpha$，且$b \subset \gamma$，$\gamma \cap \alpha = b'$，所以$b' /\!/ b$.

又因为$b' \not\subset \beta$，所以$b' /\!/ \beta$.

因为a和b是异面直线，且$b' /\!/ b$，a、$b' \subset \alpha$，所以a与b'必相交.

又因为$a /\!/ \beta$，所以$\alpha /\!/ \beta$.

证法2 假设平面α与β不平行，则α与β必相交．不妨设$\alpha \cap \beta = c$.

因为，$a /\!/ \beta$，$a \subset \alpha$，$c = \alpha \cap \beta$，所以$a /\!/ c$.

同理，$b /\!/ c$.

从而$a /\!/ b$，这与a和b是异面直线矛盾.

故$\alpha /\!/ \beta$.

评注 第一种证法通过作图，创造条件应用两个平面平行的判定定理证明了$\alpha /\!/ \beta$．第二种证法通过否定结论，应用直线与平面平行的性质定理推出了$a /\!/ b$，从而产生了矛盾.

思考题2 在等腰$\triangle ABC$中，AD为底边BC上的高．在AD上取点E，使$AE = \frac{1}{3}AD$，过E作$MN /\!/ BC$，分别交AB、AC于M、N．以MN为折痕将$\triangle AMN$折起到$\triangle A'MN$的位置，使二面角$A' - MN - D$为$60°$.

求证：平面$A'MN \perp$平面$A'BC$.

证明 如图3-13，因为$AE \perp MN$，所以将$\triangle AMN$沿MN折起后，仍有$A'E \perp MN$.

又因为$MN /\!/ BC$，所以$A'E \perp BC$．因为$A'E \perp MN$，$DE \perp MN$，所以$\angle A'ED$为二面角$A' - MN - D$的平面角，即$\angle A'ED = 60°$.

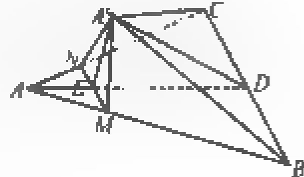


图3-13

在$\triangle A'ED$中，$A'E = AE = \frac{1}{2}DE$，$\angle A'ED = 60°$，所以$\angle A'DE = 30°$，从而$\angle DA'E = 90°$，即$A'E \perp A'D$.



于是，$A'E \perp$ 平面 $A'BC$.

又因为 $A'E$ 在平面 $A'MN$ 内，所以 $A'MN \perp$ 平面 $A'BC$.

评注　证明本题有两个关键处：一是折叠前后线段的长度和垂直关系的不变性，二是在 $\triangle A'DE$ 中证明 $\angle DA'E = 90°$. 当然，在证明 $\angle DA'E = 90°$ 时，也可以应用余弦定理.

同步检测2

一、选择题

1. 已知直线 l、m，平面 α、β，且 $l \perp \alpha$，$m \subset \beta$. 给出如下四个命题：

① 若 $\alpha /\!/ \beta$，则 $l \perp m$；

② 若 $l \perp m$，则 $\alpha /\!/ \beta$

③ 若 $\alpha \perp \beta$，则 $l \perp m$

④ 若 $l /\!/ m$，则 $\alpha \perp \beta$

其中正确命题的个数是……（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 设 α、β 是两个不重合的平面，在下列条件中，能够判定平面 α 与平面 β 平行的是（　）

A. 平面 α、β 都垂直于平面 γ

B. α 内不共线的三个点到 β 的距离相等

C. l、m 是 α 内的两条直线，且 $l /\!/ \beta$，$m /\!/ \beta$

D. l、m 是两条异面直线，且 $l /\!/ \alpha$，$l /\!/ \beta$，$m /\!/ \alpha$，$m /\!/ \beta$

3. 对于直线 m、n 和平面 α、β，在下列条件中，可判定平面 α、β 垂直的是……（　）

A. $m \perp n$，$m \perp \alpha$，$n /\!/ \beta$　　B. $m \perp n$，$\alpha \cap \beta = m$，$n \subset \alpha$

C. $m /\!/ n$，$n \perp \beta$，$m \subset \alpha$　　D. $m /\!/ n$，$m \perp \alpha$，$n \perp \beta$

4. 已知平面 $\alpha \perp$ 平面 β，m 是 α 内一条直线，n 是 β 内的一条直线，且 $m \perp n$. 那么，甲：$m \perp \beta$；乙：$n \perp \alpha$；丙：$m \perp \beta$ 或 $n \perp \alpha$；丁：$m \perp \beta$ 且 $n \perp \alpha$. 这四个结论中，不正确的三个是……（　）

A. 甲、乙、丙　　B. 甲、乙、丁　　C. 甲、丙、丁　　D. 乙、丙、丁

5. 设 m、n 是两条不同的直线，α、β 是两个不同的平面，考查下列命题，其中正确的是……（　）

A. $m \perp \alpha$，$n \subset \beta$，$m \perp n \Rightarrow \alpha \perp \beta$

B. $\alpha /\!/ \beta$，$m \perp \alpha$，$n /\!/ \beta \Rightarrow m \perp n$



C. $\alpha \perp \beta, m \perp \alpha, n // \beta \Rightarrow m \perp n$

D. $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, n \perp m \Rightarrow n \perp \beta$

6. 设有两条直线 m、n 和三个平面 α、β、γ，给出下列四个命题：

① $\left.\begin{array}{l}\alpha \cap \beta = m \\ n // m\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}n // \alpha, \\ n // \beta.\end{array}\right.$　② $\left.\begin{array}{l}\alpha \perp \beta \\ m \perp \beta \\ m \not\subset \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow m // \alpha.$

③ $\left.\begin{array}{l}\alpha // \beta \\ m \subset \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow m // \beta.$　④ $\left.\begin{array}{l}\alpha // \beta \\ \alpha \perp \gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \beta \perp \gamma$

其中正确命题的个数是…………………………………………（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 设直线 l 在平面 α 内，则平面 α 平行于平面 β 是直线 l 平行于平面 β 的……（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

8. 给出如下两个命题

甲：异面直线 m、n 分别在平面 α、β 内，且 $m // \beta$，则 $n // \alpha$；

乙：两平面互相垂直，分别在这两个平面内且互相垂直的直线一定分别垂直于另一个平面

下列判断正确的是……………………………………………………（　）

A. 甲、乙均真　　B. 甲真乙假　　C. 甲假乙真　　D. 甲、乙均假

二、填空题

9. 若一条直线与两个平行平面中的一个平行，则这条直线与另一个平面的位置关系是________.

10. 若一条直线和一个平面平行，则过此直线和这个平面平行的平面有________个.

11. 已知 m、n 是直线，α、β、γ 是平面，给出下列命题：

① 若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, n \perp m$，则 $n \perp \alpha$ 或 $n \perp \beta$；

② 若 $\alpha // \beta, \alpha \cap \gamma = m, \beta \cap \gamma = n$，则 $m // n$；

③ 若 m 不垂直于 α，则 m 不可能垂直于 α 内的无数条直线；

④ 若 $\alpha \cap \beta = m, n // m$，且 $n \not\subset \alpha, n \not\subset \beta$，则 $n // \alpha$ 且 $n // \beta$.

其中所有正确命题的序号是

12. 在两个互相垂直的平面的交线上，有两个已知点 A、B，AC 和 BD 分别是这两个平面内垂直于交线 AB 的线段，已知 $AC = 6\text{cm}$，$AB = 8\text{cm}$，$BD = 24\text{cm}$，则 C、D 两点间的



距离是________

13. 已知平面 $\alpha /\!/ \beta$，$P \notin \alpha$，$P \notin \beta$，过 P 的两条直线分别交 α、β 于 A、B、C、D 四个点，其中 A、$C \in \alpha$，B、$D \in \beta$，且 $PA = 6$，$AB = 14$，$BD = 12$，则 AC 的长为________.

14. 平面 $\alpha /\!/$ 平面 β，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 分别在 α、β 内，线段 AA'、BB'、CC' 共点于 O，且 O 在 α、β 之间．若 $AB = 2$，$AC = 1$，$\angle BAC = 60^\circ$，$OA : OA' = 3 : 2$，则 $\triangle A'B'C'$ 的面积为________

15. 平面 $\alpha \perp$ 平面 β，A 为平面 α 与 β 交线 MN 上一点，AB、AC 分别在平面 α、β 内，且 $\angle MAC = \angle MAB = 45^\circ$，则 $\angle BAC$ 的度数是________.

16. 平面 $\alpha \perp$ 平面 β，$\alpha \cap \beta = l$，直线 $a \subset$ 平面 α，直线 $b \subset$ 平面 β，且 a、b 与棱 l 都不垂直．给出下列四个结论：

①a 与 b 可能垂直，但不可能平行；

②a 与 b 可能垂直，也可能平行；

③a 与 b 不可能垂直，但可能平行；

④a 与 b 不可能垂直，也不可能平行．

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题

17. 如图 3-14，已知两条异面直线 AC、DF 与三个互相平行的平面 α、β、γ 依次分别交于点 A、B、C 和 D、E、F，连接 AF 交平面 β 于 M，连接 DC 交平面 β 于 N．求证：四边形 $BMEN$ 是平行四边形．

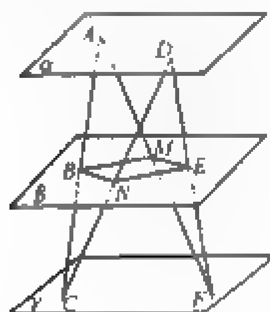


图 3-14

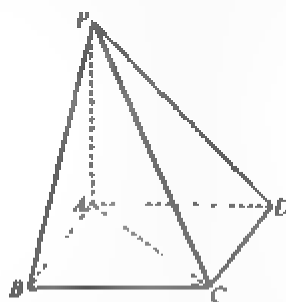


图 3-15

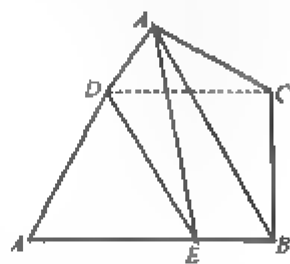


图 3-16

18. 如图 3-15，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$PA \perp$ 平面 $ABCD$，$PA = AD = 2a$，$AB = a$，$\angle ABC = 60^\circ$．求证：平面 $PCD \perp$ 平面 PAC．

19. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$B_1C_1 = A_1C_1$，$AC_1 \perp A_1B$，M、N 分别是 A_1B_1、AB 的中点



(1) 求证：$C_1M \perp$ 平面 A_1ABB_1；

(2) 求证：$A_1B \perp AM$；

(3) 求证：平面 $AMC_1 \parallel$ 平面 NB_1C.

20. 如图3-16，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$AB \perp BC$，且 $AD = CD$，在 AB 上截取 $AE = AD$，将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起，使 A 点到达 A'. 若 $A'C = A'B$，求证：平面 $A'DE \perp$ 平面 $BCDE$.



第八讲 空间向量及其应用

知识点金

1 空间向量的基本性质

(1) 空间向量的加法运算律

交换律：$a+b=b+a$；

结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

数乘分配律：$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b \quad (\lambda\in\mathbf{R})$.

(2) 共线向量

定理 　对空间任意两个非零向量 a、b，$a\parallel b$ 的充要条件是存在实数 λ，使得 $a=\lambda b$.

特别地，当 a、b 中至少有一个为零向量时，我们认为 a、b 共线.

推论 　如果 l 为经过已知点 A 且平行于已知非零向量 a 的直线，那么对空间任意一点 O，点 P 在直线 l 上的充要条件是存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda a$. 这时，我们说 a 是直线 l 的方向向量.

定比分点公式 　设 P 分 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 λ，O 为空间任意一点，则有

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}.$$

特别地，当 P 为线段 AB 中点时，$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

(3) 共面向量

定理 　如果向量 a、b 不共线，那么向量 p 与向量 a、b 共面的充要条件是存在实数对 x、y，使得 $p=xa+yb$.

推论 　空间一点 P 位于平面 AOB 内的充要条件是存在实数对 x、y，使得 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}$

$+ y\overrightarrow{OB}$

(4) 空间向量基本定理

定理 如果三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 不共面，那么对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序实数组 x、y、z，使得 $\boldsymbol{p} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$.

推论 设 O、A、B、C 是不共面的四个点，则对空间任一点 P，都存在唯一的有序实数组 x、y、z，使得 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$.

2. 向量的数量积和矢量积

(1) 空间两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的数量积为

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >$,

其中 $< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

数量积满足如下性质：

①$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$;

②$(\lambda\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \quad (\lambda \in \mathbf{R})$;

③$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$;

④$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

一般情况下，$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$，即向量的数量积不满足结合律.

(2) 空间向量的矢量积

空间两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的矢量积用 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 表示，它仍然是一个向量，这个向量是一个与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 均垂直的向量，其模为以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积，即 $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \sin < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >$.

矢量积运算满足结合律和分配律，且 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

3. 空间向量的坐标运算

(1) 设两点 $A(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$，则向量 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$;

两点间距离 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

(2) 设向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$，则

$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$;

$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) \quad (\lambda \in \mathbf{R})$;

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$，$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$;

$\cos < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} > = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}$;

$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$;

$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, a_3 = \lambda b_3 \quad (\lambda \in \mathbf{R})$;



$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$
$$=(y_1z_2-y_2z_1)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\boldsymbol{k}.$$

其中 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$.



例题精析

例 1 已知正方形 $ABCD$ 和 $ABEF$ 所在的平面互相垂直，M、N 分别是对角线 AC、BF 上的点，且 $AM=FN$. 求证：不论点 M 在 AC 上何处，直线 MN 不可能同时与 AC 和 BF 都垂直.

分析 从欲证结论看，本题适宜用反证法，可设法利用两向量垂直的充要条件推出矛盾.

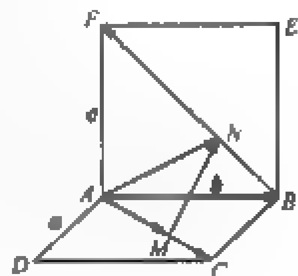


图 4-1

证明 如图 4-1，设 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}$（$0\leqslant\lambda\leqslant1$），则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AM}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\boldsymbol{a}+(1-\lambda)(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$.

从而 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{a}+(1-\lambda)(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})-\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(1-\lambda)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+(1-\lambda)\boldsymbol{c}$.

因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$，所以 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}=[(1-\lambda)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+(1-\lambda)\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(1-\lambda)|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=-\lambda|\boldsymbol{a}|^2$,

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BF}=[(1-\lambda)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+(1-\lambda)\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$$
$$=(1-\lambda)|\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=(2-\lambda)|\boldsymbol{b}|^2$$

假设 $MN\perp AC$，且 $MN\perp BF$，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}\lambda=0,\\ \lambda=2,\end{cases}\text{矛盾}$$

故直线 MN 不可能同时与 AC 和 BF 都垂直.

评注 本题也可以通过建立空间直角坐标，利用向量的运算来证明，还可以先证明 $MN\,/\!/$ 平面 BCE（证明过程见第 2 讲例 3），再利用 AC 和 BF 不可能同时与平面 BCE 垂直来证明.

例 2 （第 12 届希望杯数学邀请赛试题）已知 A、B、C、D 四点不共面，且它们两两的距离均为 1，点 P、Q 分别在线段 AB、CD 上运动，求 P 与 Q 两点间距离的最小值.



分析　本题的结论是正四面体的一个重要性质，下面利用向量给出一种解法.

解　如图，设 $AP=x$，$DQ=y\,(0<x,y<1)$，则 $PB=1-x$，$QC=1-y$，从而 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}$.

因为 $\overrightarrow{PB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{CQ}$ 的夹角均为 120°，$\overrightarrow{PB}$ 与 $\overrightarrow{CQ}$ 的夹角为 90°，所以

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{PQ}|^2 &= |\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}|^2\\
&= |\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CQ}|^2+2\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CQ}+2\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{PB}\\
&= (1-x)^2+1+(1-y)^2+2(1-x)\cos120^\circ+2(1-y)\cos120^\circ+2(1-x)(1\\
&\quad -y)\cos90^\circ\\
&= x^2+y^2-x-y+1\\
&= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

所以当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时，$|\overrightarrow{PQ}|^2$ 取得最小值为 $\frac{1}{2}$.

故 $|PQ|_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

评注　显然，当 PQ 为异面直线 AB 和 CD 的公垂线段时，P、Q 两点间的距离最小，因此，本题也可以直接求异面直线 AB 和 CD 间的距离.

例3　已知在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为 AC 的中点，求证：$AB_1\,/\!/$ 平面 DBC_1.

分析　要证明平面外的直线 l 与平面 α 平行，只须确定平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{n}$，证明 $\boldsymbol{n}\perp l$ 即可推出 $l\,/\!/\,\alpha$.

证明　以 A 为原点，AB 为 y 轴，AA_1 为 z 轴建立空间直角坐标系如图4-2所示，则 $A(0,0,0)$. 设 $B(0,a,0)$、$B_1(0,a,b)$，则 $D\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{1}{4}a,0\right)$、$C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a,b\right)$，于是 $\overrightarrow{AB_1}=(0,a,b)$，$\overrightarrow{BD}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a,-\frac{3}{4}a,0\right)$，$\overrightarrow{DC_1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a,\frac{1}{4}a,b\right)$.

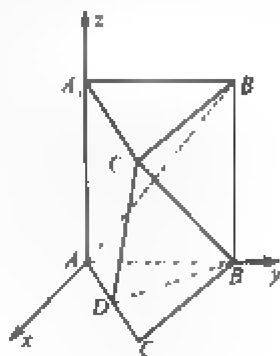


图4-2

设平面 DBC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BD}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DC_1}$，得 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0$，即

$$
\begin{cases}
\frac{\sqrt{3}}{4}ax-\frac{3}{4}ay=0,\\
\frac{\sqrt{3}}{4}ax+\frac{1}{4}ay+bz=0.
\end{cases}
$$

令 $y=\sqrt{3}$，则 $x=3$，$z=-\frac{\sqrt{3}}{b}a$，即 $\boldsymbol{n}=\left(3,\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{b}a\right)$.



因为 $n\cdot\overrightarrow{AB_1}=\left(3\sqrt{3},\ \ \frac{\sqrt{3}}{b}a\right)\cdot(0,a,b)=0$，且 $AB_1\not\subset$ 平面 DBC_1，$AB_1\perp n$，所以 $AB_1\parallel$ 平面 DBC_1.

评注 本题用向量的方法证明虽然不是最简单的，但它为我们提供了证明线面平行的一种新方法，值得重视.

例 4 已知单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 CC_1 的中点，求证：平面 $A_1BD\perp$ 平面 EBD.

分析 用向量证明两个平面 α、β 垂直，一般有两种思路：一是确定两平面 α、β 的法向量 n_1、n_2，若能证明 $n_1\perp n_2$，便有 $\alpha\perp\beta$；二是在平面 α 内找出向量 a，若能证明 a 与 β 的法向量共线，则可推出 $\alpha\perp\beta$.

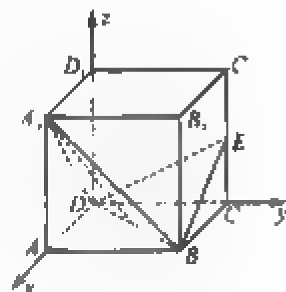


图 4-3

证法 1 建立空间直角坐标系如图 4-3 所示，则 $D(0,0,0)$、$A_1(1,0,1)$、$B(1,1,0)$、$E\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，于是 $\overrightarrow{DA_1}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DE}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$.

设平面 EBD 的法向量为 $n_1=(x_1,y_1,z_1)$，则由 $n_1\perp\overrightarrow{DB}$，$n_1\perp\overrightarrow{DE}$，得 $n_1\cdot\overrightarrow{DB}=0$，$n_1\cdot\overrightarrow{DE}=0$，即 $\begin{cases}x_1+y_1=0,\\ y_1+\frac{1}{2}z_1=0.\end{cases}$

令 $x_1=1$，则 $y_1=-1$，$z_1=2$，即 $n_1=(1,-1,2)$.

设平面 A_1BD 的法向量为 $n_2=(x_2,y_2,z_2)$，则由 $n_2\perp\overrightarrow{DA_1}$，$n_2\perp\overrightarrow{DB}$，得

$$n_2\cdot\overrightarrow{DA_1}=0,\ n_2\cdot\overrightarrow{DB}=0,\text{即}\begin{cases}x_2+z_2=0,\\ x_2+y_2=0.\end{cases}$$

令 $x_2=1$，则 $y_2=z_2=-1$，即 $n_2=(1,-1,-1)$.

因为 $n_1\cdot n_2=(1,-1,2)\cdot(1,-1,-1)=0$，所以 $n_1\perp n_2$.

故平面 $A_1BD\perp$ 平面 EBD.

证法 2 建立空间直角坐标系同证法 1，设 BD 的中点为 $O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，则 $\overrightarrow{OA_1}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$，平面 EBD 的法向量为 $n_1=(1,-1,2)$.

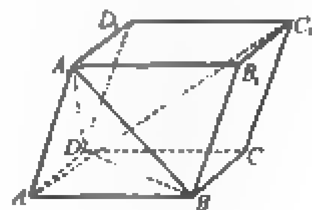


图 4-4

因为 $n_1=2\overrightarrow{OA_1}$，所以向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 与 n_1 共线.

又因为 $OA_1\subset$ 平面 A_1BD，所以 $OA_1\perp$ 平面 EBD.

故平面 $A_1BD\perp$ 平面 EBD.

例 5 如图 4-4，已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD$.



(1) 求证：$AA_1 \perp BD$；

(2) 当$\dfrac{AA_1}{AB}$为何值时，能使 $AC_1\perp$ 平面 A_1BD？并说明理由。

分析 这是一个证明线线垂直、线面垂直的典型问题，第 2 讲中曾给出了两种纯几何证法，下面再给出一种向量解法。

解 (1) 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=x$，$|\boldsymbol{c}|=y$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=\theta$，则$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$。

因为$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

$$=xy\cos\theta-xy\cos\theta=0,$$

所以 $AA_1\perp BD$。

(2) 因为$\overrightarrow{AC_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{A_1D}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，所以

$AC_1\perp$ 平面 A_1BD

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AC_1}\perp\overrightarrow{A_1B},\\ \overrightarrow{AC_1}\perp\overrightarrow{A_1D}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0\\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-|\boldsymbol{c}|^2=0,\\ |\boldsymbol{b}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-|\boldsymbol{c}|^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x^2\cos\theta-xy\cos\theta-y^2=0,\\ x^2+x^2\cos\theta-xy\cos\theta-y^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x^2\cos\theta-xy\cos\theta-y^2=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)(x+y+x\cos\theta)=0.$$

因为 $x+y+x\cos\theta\neq0$，所以 $x=y$。

故当$\dfrac{AA_1}{AB}=1$时，$AC_1\perp$ 平面 A_1BD。

评注 (i) 利用向量证明空间平行与垂直的一般方法是，先选取一组基向量，然后设法把其他向量用这组基向量分别来表示，通过向量的运算去证明。(ii) 与纯几何方法相比较，上面的解法显得更加简洁、自然。

例 6 （第 8 届希望杯数学邀请赛试题）在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，上、下底面边长 $A_1B_1=2$，$AB=4$，高为$\sqrt{6}$，E 为 BC 的中点。作平行于底面的截面，与线段 AD_1、AB_1、C_1E 分别交于 P、Q、R，求$\triangle PQR$ 面积的取值范围。

分析 本题的纯几何解法是选择适当的参数，设法将$\triangle PQR$ 的面积表示为这个参数的函数，从而将问题转化为求这个函数的值域。注意到矢量运算的几何意义，下面给出



本题的一种向量解法.

解 如图4-5,以A为原点,直线DA、AB分别为x轴、y轴建立空间直角坐标系,则$A(0,0,0)$,$E(-2,4,0)$,$B_1(-1,3,\sqrt{6})$,$C_1(-3,3,\sqrt{6})$,$D_1(-3,1,\sqrt{6})$.

设$\frac{AP}{AD_1}=\frac{AQ}{AB_1}=\frac{ER}{EC_1}=t(0<t<1)$,则分比$\lambda=\frac{AP}{PD_1}=\frac{AQ}{QB_1}=\frac{ER}{RC_1}=\frac{t}{1-t}$,由空间定比分点坐标公式,得$P(-3t,t,\sqrt{6}t)$,$Q(-t,3t,\sqrt{6}t)$,$R(-2-t,4-t,\sqrt{6}t)$.

图4-5

所以 $S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|$

$$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 2t & 2t & 0 \\ -2+2t & 4-2t & 0 \end{matrix}\right\|$$

$$=\frac{1}{2}|0+0+2t(6-4t)k|$$

$$=t(6-4t)=-4\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{4}.$$

因为$0<t<1$,所以$0<S_{\triangle PQR}\leqslant\frac{9}{4}$.

评注 这是一道难度较大的立体几何综合题,上述解法是通过矢量运算的几何意义将其转化为定量计算,降低了思维难度,易于把握,再次体现了几何问题代数化的魅力.

例7 如图4-6,四棱锥$S-ABCD$的底面是平行四边形,平面α与直线AD、SA、SC分别交于点P、Q、R,且$\frac{AP}{AD}=\frac{SQ}{SA}=\frac{CR}{CS}=x$,点$M$在直线$SB$上,$N$为$CD$的中点,且直线$MN\parallel$平面$\alpha$.求证:对所有满足条件的平面$\alpha$,点$M$都落在某一条长为$\frac{\sqrt{5}}{2}SB$的线段上.

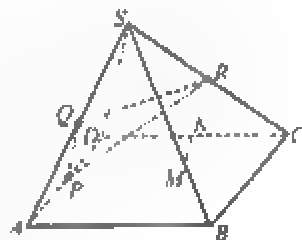


图4-6

分析 本题的实质是当平面α运动时,对于定点N,确定动点M的存在范围,使之满足所有的题设条件.我们以$\overrightarrow{SA}$、$\overrightarrow{SB}$、$\overrightarrow{SC}$为一组基向量,利用向量的方法给出本题的一种证法.

证明 设$\overrightarrow{SA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{SB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{SC}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{SD}=\boldsymbol{d}$,则由$ABCD$为平行四边形,得$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$,即$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

因为$\frac{AP}{AD}=\frac{SQ}{SA}=\frac{CR}{CS}=x$,所以$\overrightarrow{SQ}=x\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{SR}=(1-x)\boldsymbol{c}$.



从而 $\overrightarrow{SP}=(1-x)\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}+x\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{SR}-\overrightarrow{SQ}=(1-x)\boldsymbol{c}-x\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{SP}-\overrightarrow{SQ}=(1-x)\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}+x\boldsymbol{c}$.

又因为 $MN\ /\!/\ \alpha$，所以存在 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，使得

$$\overrightarrow{NM}=\lambda\overrightarrow{QR}+\mu\overrightarrow{QP}.$$

故 $\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{SN}+\lambda\overrightarrow{QR}+\mu\overrightarrow{QP}$

$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})+\lambda[(1-x)\boldsymbol{c}-x\boldsymbol{a}]+\mu[(1-x)\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}+x\boldsymbol{c}]$

$=\left[\frac{1}{2}-\lambda x+\mu(1-x)\right]\boldsymbol{a}-\left(\frac{1}{2}+\mu x\right)\boldsymbol{b}+[1+\lambda(1-x)+\mu x]\boldsymbol{c}$.

再者，点 M 在直线 SB 上的充要条件是 $\overrightarrow{SM}=y\boldsymbol{b}(y\in\mathbf{R})$，于是得

$$\begin{cases}\frac{1}{2}-\lambda x+\mu(1-x)=0,\\ 1+\lambda(1-x)+\mu x=0.\end{cases}$$

消去 λ，得 $\mu=-\frac{x+1}{2(2x^2-2x+1)}$.

而 $y=-\left(\frac{1}{2}+\mu x\right)=-\frac{1}{2}+\frac{x^2+x}{4x^2-4x+2}$，

即 $(4y+1)x^2-(4y+3)x+2y+1=0$.

当 $y=-\frac{1}{4}$ 时，$-2x+\frac{1}{2}=0$，即 $x=\frac{1}{4}$；

当 $y\neq-\frac{1}{4}$ 时，由 $x\in\mathbf{R}$，得

$\Delta=(4y+3)^2-4(4y+1)(2y+1)\geqslant 0$

解得 $-\frac{\sqrt{5}}{4}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{5}}{4}$.

综上所述，$-\frac{\sqrt{5}}{4}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{5}}{4}$.

故对所有满足条件的平面 α，点 M 都落在某一条长为 $\frac{\sqrt{5}}{2}SB$ 的线段上.

例 8 已知 OA、OB、OC、OD 是空间中四条不同的射线，且每两条射线之间所成的角都相等，记这些相等的角为 θ.

(1) 求 θ 的大小；

(2) 设 OP 是一条不同于 OA、OB、OC、OD 的射线，记 OP 与 OA、OB、OC、OD 所成的角分别为 α、β、γ、δ，且记 $m=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta$，$n=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta$



证明：当射线 OP 绕 O 点转动时，m、n 的值不变.

分析　由题设联想到正四面体的中心与四个顶点相连得到的四条射线两两所成的角相等，启发我们可通过构造正四面体求角 θ 的大小. 对于第(2)小题，可通过建立空间直角坐标系，利用向量的数量积的性质求 m、n 的值.

解　(1) 如图 4-7，在射线 OA、OB、OC、OD 上分别取点 A_1、B_1、C_1、D_1，使得 $OA_1=OB_1=OC_1=OD_1=1$.

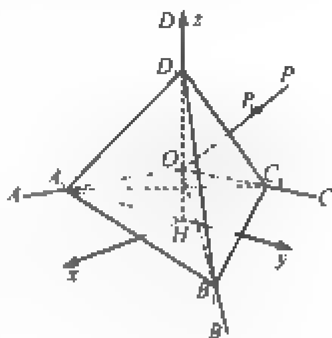


图 4-7

由 $\angle A_1OB_1=\angle B_1OC_1=\angle C_1OD_1=\angle D_1OA_1=\angle A_1OC_1=\angle B_1OD_1$ 知，$A_1B_1=B_1C_1=C_1A_1=D_1A_1=D_1B_1=D_1C_1$，则四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 为正四面体，且 O 为其中心.

延长 D_1O 交面 $A_1B_1C_1$ 于 H，则 $D_1H\perp$ 面 $A_1B_1C_1$.

记正四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，则 $A_1H=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$D_1H=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，在 $Rt\triangle A_1HO$ 中，由 $A_1H^2+OH^2=OA_1^2$，得

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a-1\right)^2=1$$

解得 $a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

在 $\triangle A_1OB_1$ 中，由余弦定理，得

$$\cos\angle A_1OB_1=\frac{1+1-\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}{2\times1\times1}=-\frac{1}{3}$$

故 $\theta=\pi-\arccos\frac{1}{3}$.

(2) 如图 4-7，以 H 为原点，线段 A_1B_1、B_1C_1 的垂直平分线分别为 x 轴、y 轴建立空间直角坐标系，则 $H(0,0,0)$、$A_1\left(\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$、$B_1\left(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$、$C_1\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},0,0\right)$、$D_1\left(0,0,\frac{4}{3}\right)$、$O\left(0,0,\frac{1}{3}\right)$.

从而 $\overrightarrow{OA_1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{OB_1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{OC_1}=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},0,-\frac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{OD_1}=(0,0,1)$.

在射线 OP 上取点 P_1，使 $OP_1=1$，并设 $\overrightarrow{OP_1}=(x,y,z)$.

因为 $|\overrightarrow{OA_1}|=|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{OC_1}|=|\overrightarrow{OP_1}|=1$，所以



$\cos\alpha=\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\frac{\sqrt{2}}{3}x-\frac{\sqrt{6}}{3}y-\frac{1}{3}z$,

$\cos\beta=\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\frac{\sqrt{2}}{3}x+\frac{\sqrt{6}}{3}y-\frac{1}{3}z$,

$\cos\gamma=\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OP_1}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}x-\frac{1}{3}z$,

$\cos\delta=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OP_1}=z$.

故 $m=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta=0$ 为定值.

又 $n=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x-\frac{\sqrt{6}}{3}y-\frac{1}{3}z\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x+\frac{\sqrt{6}}{3}y-\frac{1}{3}z\right)^2+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}x-\frac{1}{3}z\right)^2+z^2$$

$$=\frac{4}{3}(x^2+y^2+z^2),$$

而 $|\overrightarrow{OP_1}|^2=1$,所以 $x^2+y^2+z^2=1$.

故 $n=\frac{4}{3}$ 为定值.

可见,当射线 OP 绕点 O 转动时,m、n 的值均不变.

评注 第(1)小题主要考查联想、构造等思维品质和思维方法;第(2)小题是一个运动中的不变量问题,根据三角函数的定义,角 α、β、γ、δ 的余弦值与点 P 的位置关系,因此,为了运算简便起见,我们在射线 OP 上取点 P_1,使得 $|\overrightarrow{OP_1}|=1$,并引入单位向量 $\overrightarrow{OP_1}=(x,y,z)$,其中 $x^2+y^2+z^2=1$,将三角函数的运算转化为代数式的化简,使问题得到整体解决.



思考交流

思考题 1 (2004 年河南省高中数学竞赛试题)已知在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=BC=3$,$BB_1=4$.连接 B_1C,过点 B 作 B_1C 的垂线交 CC_1 于 E,交 B_1C 于 F.

(1) 求证:$A_1C\perp$ 平面 EBD;

(2) 设 $A_1C\cap$ 平面 $EBD=K$,求线段 A_1K 的长.

分析 由于长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的大小是确定的,所以本题适宜于建立空间直角坐标系来解决.

解 (1) 以 DA、DC、DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系,则 $D(0,0,0)$,$A(3,0,0)$,$C(0,3,0)$,$B(3,3,0)$,$A_1(3,0,4)$,$D_1(0,0,4)$,$C_1(0,3,4)$,$B_1(3,3,4)$.

设 $E(0,3,z)$,则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{B_1C}=0$,即 $9-4z=0$,得 $z=\frac{9}{4}$,故 $E\left(0,3,\frac{9}{4}\right)$.



于是，$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{DB}=-3\times3+3\times3=0$，$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{DE}=3\times3-4\times\frac{9}{4}=0$，

所以$\overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{DE}$，故$A_1C\perp$平面$EBD$.

(2) 由$\overrightarrow{DK}=\lambda\overrightarrow{DB}+\mu\overrightarrow{DE}=\left(3\lambda,3\lambda+3\mu,\frac{9}{4}\mu\right)$，知$K\left(3\lambda,3\lambda+3\mu,\frac{9}{4}\mu\right)$，所以$\overrightarrow{A_1K}=\left(3\lambda-3,3\lambda+3\mu,\frac{9}{4}\mu-4\right)$.

因为$\overrightarrow{A_1K}\perp\overrightarrow{DB}$，所以$\overrightarrow{A_1K}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，即

$$\left(3\lambda-3,3\lambda+3\mu,\frac{9}{4}\mu-4\right)\cdot(3,3,0)=0.$$

化简得，$2\lambda+\mu-1=0$. ①

同理，由$\overrightarrow{A_1K}\perp\overrightarrow{DE}$，得$16\lambda+25\mu-16=0$. ②

由①、②得，$\lambda=\frac{9}{34}$，$\mu=\frac{8}{17}$.

因此，$\overrightarrow{A_1K}=\left(-\frac{75}{34},\frac{75}{34},-\frac{50}{17}\right)$.

故$|\overrightarrow{A_1K}|=\sqrt{\left(-\frac{75}{34}\right)^2+\left(\frac{75}{34}\right)^2+\left(-\frac{50}{17}\right)^2}=\frac{25\sqrt{34}}{34}$.

思考题2 已知$\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$是空间中两两垂直的三个单位向量，π是过点P的一个平面，A'、B'、C'分别是点A、B、C在平面π上的射影，求证：$|\overrightarrow{PA'}|^2+|\overrightarrow{PB'}|^2+|\overrightarrow{PC'}|^2=2$.

分析 由向量$\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$两两垂直，我们联想到长方体，注意到$\overrightarrow{PA'}$、$\overrightarrow{PB'}$、$\overrightarrow{PC'}$分别是$\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$在平面π上的射影，且$|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|=1$，可引入$\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$与平面$\pi$所成的角，从而将证明$|\overrightarrow{PA'}|^2+|\overrightarrow{PB'}|^2+|\overrightarrow{PC'}|^2=2$转化为角的三角恒等式.

证明 设$\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$与平面π所成的角分别为α、β、γ，由于点A、B、C在平面π上的射影分别为A'、B'、C'，所以$\angle APA'=\alpha$，$\angle BPB'=\beta$，$\angle CPC'=\gamma$. 又因为$|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|=1$，所以$|\overrightarrow{PA'}|=\cos\alpha$，$|\overrightarrow{PB'}|=\cos\beta$，$|\overrightarrow{PC'}|=\cos\gamma$，即$|\overrightarrow{PA'}|^2+|\overrightarrow{PB'}|^2+|\overrightarrow{PC'}|^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$.

当α、β、γ中至少有一个为$0°$或$90°$时，由$\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$两两垂直知，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$显然成立.

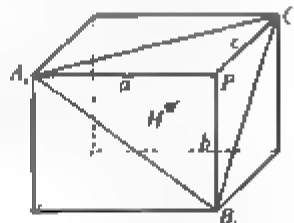


图4-8

当α、β、γ均为锐角时，将平面π平移，使之与向量$\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$所在直线分别交于点A_1、B_1、C_1，并以PA_1、PB_1、PC_1为相邻三条棱作长方体(见图4-8)，则α、β、γ分别为PA_1、PB_1、PC_1与平面$A_1B_1C_1$所成的角.

作$PH\perp$平面$A_1B_1C_1$，垂足为H，则

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=3-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma).$$



记 $PA_1=a, PB_1=b, PC_1=c$，则

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=3-\left(\frac{PH^2}{a^2}+\frac{PH^2}{b^2}+\frac{PH^2}{c^2}\right)$$

下面用体积法求 PH.

在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，由余弦定理得

$$\cos\angle A_1C_1B_1=\frac{C_1A_1^2+C_1B_1^2-A_1B_1^2}{2C_1A_1\cdot C_1B_1}$$

$$=\frac{(c^2+a^2)+(c^2+b^2)-(a^2+b^2)}{2\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}}$$

$$=\frac{c^2}{\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}}.$$

所以 $\sin\angle A_1C_1B_1=\dfrac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}}$.

从而 $S_{\triangle A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{2}C_1A_1\cdot C_1B_1\sin\angle A_1C_1B_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.

又因为 $V_{P-A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{6}abc$，所以 $\dfrac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot PH=\dfrac{1}{6}abc$.

于是 $PH=\dfrac{abc}{2S_{\triangle A_1B_1C_1}}=\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=3-PH^2\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$

$$=3-\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}=2$$

综上所述，总有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$.

故 $\overrightarrow{PA'}^2+\overrightarrow{PB'}^2+\overrightarrow{PC'}^2=2$.

同步检测4

一、选择题

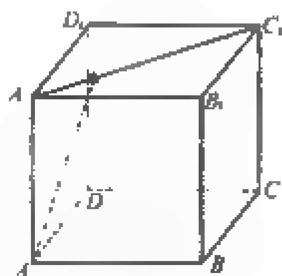


图4-9

1. 如图4-9，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为面对角线 A_1C_1 上一点，且 $\overrightarrow{A_1E}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{A_1C_1}$，若 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AA_1}+y(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，则实数 x,y 的值分别是……（　）

A. $x=1,y=\dfrac{1}{2}$　　　　B. $x=\dfrac{1}{2},y=1$

C. $x=1,y=\frac{1}{3}$ D. $x=1,y=\frac{1}{4}$

2. 将空间中以 $A(0,0,0)$,$B(10,10,0)$,$C(0,10,0)$,$D(0,10,5)$ 为顶点的四面体 $ABCD$ 记为 V,点 $P(2,7,2)$,则下列判断正确的是 …………………… ( )

A. 点 P 在 V 的内部

B. 点 P 在 V 的一个面上,但不在棱上

C. 点 P 在 V 的一条棱上

D. 点 P 在 V 的外部

3. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中,过点 $P(2,-3,5)$,且与向量 $\boldsymbol{d}=(-2,1,-2)$ 平行的直线 l 交平面 yOz 于点 Q,则点 Q 的坐标为 …………………… ( )

A. $(4,-4,7)$ B. $(0,-2,3)$ C. $\left(-3,-\frac{1}{2},0\right)$ D. $(-4,0,-1)$

4. 已知 $ABCD$ 为四面体,O 为底面 $\triangle BCD$ 内一点,则 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$ 是 O 为 $\triangle BCD$ 重心的 …………………… ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E、F、G、H、P、Q 分别是棱 A_1A、AB、BC、CC_1、C_1D_1、D_1A_1 的中点,则 …………………… ( )

A. $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{PQ}=\mathbf{0}$ B. $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{GH}-\overrightarrow{PQ}=\mathbf{0}$

C. $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}-\overrightarrow{PQ}=\mathbf{0}$ D. $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{PQ}=\mathbf{0}$

6. 在棱长为 1 的正四面体 $ABCD$ 中,E、F 分别是棱 BC、AD 的中点,则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}=$ …………………… ( )

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. 0

7. 正方体 $C=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x,y,z\leqslant 1\}$ 被平面 $x=y$,$y=z$,$z=x$ 切开后分成的部分数是 …………………… ( )

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

8. 在四面体 $ABCD$ 中,P 是面 ABC 内一点,Q 是面 BCD 内一点,且满足 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}+u\overrightarrow{AD}$,若 $\frac{x}{y}=\frac{s}{t}$,则线段 AQ 与 DP 的关系是 …… ( )

A. AQ 与 DP 所在直线为异面直线 B. AQ 与 DP 所在直线平行

C. 线段 AQ 与 DP 必相交 D. 线段 AQ 与 DP 延长后相交

二、填空题

9. 在空间直角坐标系中,已知点 $A(1,2,-1)$,向量 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 关于 x 轴对称,向量 $\overrightarrow{OC}$



与$\overrightarrow{OA}$关于平面xOy对称，则向量$\overrightarrow{BC}$的坐标为______.

10. 已知三点$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$，点D满足$DB\perp AC$，$DC\perp AB$，$|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{BC}|$，则$D$点的坐标为______.

11. 设P、A、B、C为空间四个点，$\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{c}$，且$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-1$，则$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|=$______.

12. 在空间直角坐标系中，已知三点$A(3,0,0)$，$B(0,4,0)$，$C(0,2,0)$，$P(x,y,z)$是平面ABC内一点，则x、y、z满足的关系式是______.

13. 已知四棱锥$P-ABCD$的底面是平行四边形，且$\overrightarrow{AB}=(2,-1,-4)$，$\overrightarrow{AD}=(4,2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-1,2,\ 1)$，则$PA$与平面$ABCD$的位置关系是______.

14. 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，以D为原点，$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DD_1}$所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系，MN是异面直线AB_1和BC_1的公垂线段，其中点M在AB_1上，点N在BC_1上，则向量$\overrightarrow{MN}$的坐标为______.

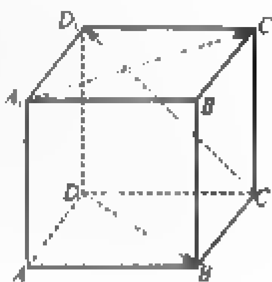


图4 10

15. 如图4 10，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD_1}+\overrightarrow{A_1C_1}$等于______.

16. 已知正三棱锥$P-ABC$中，O为底面$\triangle ABC$的中心，若$\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{c}$，则$\overrightarrow{PO}=$______.

三、解答题

17. 在空间四边形$ABCD$中，$AB=AC$，$DB=DC$.

(1) 求证：$AD\perp BC$；

(2) 若$AD=BC$，E、F、G、H分别为AB、AC、CD、DB的中点，求证：$EG\perp FH$.

18.（2004年山东省高中数学竞赛试题）已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，M、N、P分别是棱CC_1、BC、CD的中点．求证：$A_1P\perp$平面DMN.

19. 过四面体$PABC$的每条棱及其对棱的中点作平面，试证这些平面交于一点.

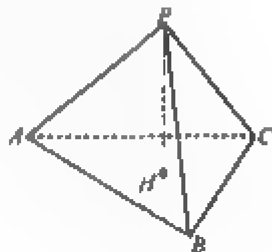


图4 11

20. 如图4 11，P为$\triangle ABC$所在平面外一点，记$\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{c}$，且$PA$、$PB$、$PC$两两垂直，$H$为$\triangle ABC$的垂心.

(1) 求证：$\triangle ABC$为锐角三角形；

(2) 试用$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$表示向量$\overrightarrow{PH}$.

第5讲 空间中的距离

知识点金

1. 空间中的六种距离

空间距离包括：两点间的距离，点到直线的距离，异面直线间的距离，点到平面的距离，直线与平面的距离，两个平行平面的距离，其中核心问题是点到直线、点到平面的距离。

2. 空间距离的求法

对于空间各种距离的计算，既要掌握其概念，又要能进行它们之间的转化，还要能通过作辅助图形及应用解三角形的方法求出这些距离。必要时，还可通过特殊的方法与技巧进行处理。

(1) 两点间的距离即线段的长。常用的求法有：① 通过解三角形求解；② 利用空间两点间的距离公式计算；③ 将线段的长转化为向量的模，利用空间向量的数量积求解。

(2) 点到直线的距离。常用的求法有：① 作出垂线段，直接计算；② 利用平面几何知识，如转化为求三角形的高；③ 利用向量求解。

(3) 异面直线的距离。这是一个难点，常用的方法有：① 直接法：先作出公垂线段，再求其长度；② 转化法：将异面直线的距离转化为直线与平面或平面与平面的距离；③ 极值法：引入变量，转化为求函数的最小值；④ 向量法：设 n 是异面直线 a、b 的法向量，点 A、B 分别在直线 a、b 上，则 $\overrightarrow{AB}$ 在 n 上的投影的绝对值即为异面直线 a、b 间的距离。

(4) 点到平面的距离。常用的求法有：① 直接法：先作出垂线段，再求其长度；② 体积法：将点到平面的距离转化为求三棱锥的高；③ 向量法：设 P 为平面 α 外一点，PA 是平面 α 的一条斜线（A 为斜足），n 是平面 α 的法向量，则 $\overrightarrow{PA}$ 在 n 上的投影的绝对值即为点 P 到平面 α 的距离。

(5) 直线和平面的距离。可转化为点到平面的距离来解决。

(6) 平面和平面的距离。也可转化为点到平面的距离来求解。





例题精析

例1 （第9届希望杯数学邀请赛试题）已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，点A关于直线A_1C、BD_1的对称点分别为P、Q，则P、Q两点间的距离为（　）

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

分析　点关于直线的对称点问题，实质上是一个垂直和中点的问题．因此，求线段PQ的长可转化为求$\triangle APQ$中位线长的两倍．当然，本题也可以通过建立空间直角坐标系，利用空间两点间的距离公式求解．

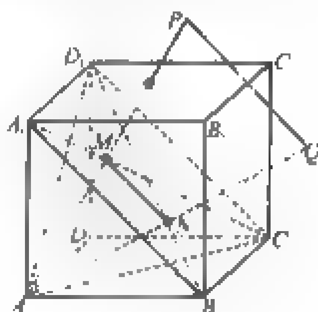


图5-1

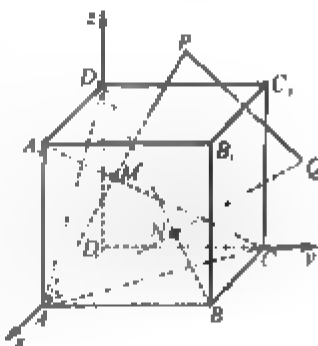
解法1　如图5-1，设AP交A_1C于M，AQ交BD_1于N，由对称性知，M、N分别为AP、AQ的中点，则$PQ=2MN$．

连接AC，在$Rt\triangle A_1AC$中，由射影定理，得$A_1M=\frac{A_1A^2}{A_1C}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，可见，$M$是$A_1C$的一个三等分点．

同理可证，N是BD_1的一个三等分点．

在矩形A_1BCD_1中，易知$MN=\frac{1}{3}A_1B=\frac{\sqrt{2}}{3}$．

故$PQ=2MN=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，应选A．



解法2　以D为原点，直线DA、DC、DD_1分别为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系如图5-2所示，则$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$D_1(0,0,1)$，$A_1(1,0,1)$．

在平面A_1AC中，点$A(1,0,0)$关于直线A_1C的对称点P的坐标为$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$；在平面$ABD_1$中，点$A(1,0,0)$关于直线$BD_1$的对称点$Q$的坐标为$\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$．从而$\overrightarrow{PQ}=\left(0,\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$．

故$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{0^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，选A．



评注 在解法1中，关键是正确作出直观图，通过对称性，利用三角形的中位线，将求PQ转化为求MN；在解法2中，关键是求对称点P、Q的坐标. 可先分别求出AP与AC的交点M、AQ与BD的交点N的坐标，再利用线段中点坐标公式求P、Q的坐标.

例2 如图5-3，在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=6$，$BB_1=8$，D为AB的中点，则异面直线CD与A_1B的距离为____.

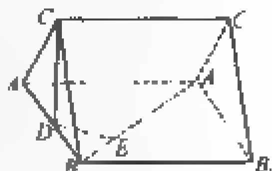


图5-3

分析 注意到$CD\perp$平面$ABCD$，只须在平面$ABCD$内过点D作A_1B的垂线，便可得到两异面直线的公垂线段，然后解三角形则可求出公垂线段的长. 本题也可以引入变量$x=BE$，利用极值法来解决.

解法1 在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面$ABB_1A_1\perp$底面ABC，且D是AB的中点，所以$CD\perp$平面ABB_1A_1.

在平面ABB_1A_1内，作$DE\perp A_1B$，垂足为E，则$CD\perp DE$，故DE是异面直线CD和A_1B的公垂线段.

在$Rt\triangle BFD$中，$DE=BD\sin\angle ABA_1=\frac{1}{2}AB\cdot\frac{AA_1}{A_1B}=\frac{1}{2}\times6\times\frac{8}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{12}{5}$.

解法2 设E为A_1B上任意一点，$BE=x$，在$\triangle DBE$中，$\cos\angle DBE=\frac{AB}{A_1B}=\frac{3}{5}$，由余弦定理，得

$$\begin{aligned}DE^2&=BD^2+BE^2-2BD\cdot BE\cos\angle DBE\\&=9+x^2-6x\cdot\frac{3}{5}\\&=\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\frac{144}{25}.\end{aligned}$$

当$x=\frac{9}{5}$时，$DE_{\min}=\frac{12}{5}$.

因为平面$ABC\perp$平面ABB_1A_1，且D是AB的中点，所以$CD\perp$平面ABB_1A_1，从而$CD\perp DE$.

故异面直线CD和A_1B的距离为$DE_{\min}=\frac{12}{5}$.

评注 上面应用了求异面直线距离中的直接法和极值法，本题还可以用向量法求解.

例3 如图5-4，$\triangle ABC$是边长为$4\sqrt{2}$的正三角形，P为$\triangle ABC$所在平面外一点，且$PA\perp$平面ABC，$PA=2$，D、E分别是BC、AC的中点，求直线AD和PE的距离.

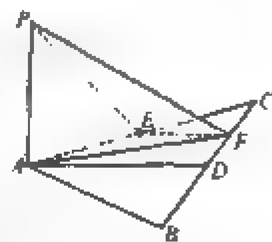


图5-4

分析 由于AD和PE是两条异面直线，它们的公垂线段在何处不很明显. 注意到E为



AC 的中点，若取 CD 的中点 F，则 $AD \parallel EF$，从而 $AD \parallel$ 平面 PEF，故直线 AD 到平面 PEF 的距离即为异面直线 AD 和 PE 的距离，而线面之间的距离又可转化为直线上一点到平面的距离，从而可用体积法求解．当然，本题也可以用代数方法来解决．

解法1　如图5-4，取 CD 的中点 F，连接 EF，则 $AD \parallel EF$，从而 $AD \parallel$ 平面 PEF，问题转化为求点 A 到平面 PEF 的距离．

设点 A 到平面 PEF 的距离为 h．

因为 $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(4\sqrt{2})^2=\sqrt{3}$，所以 $V_{P-AEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle AEF}\cdot PA=\frac{2}{3}\sqrt{3}$．

又因为 $a=PE=\sqrt{PA^2+AE^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$，

$b=PF=\sqrt{PA^2+AF^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{15}$，

$c=EF=\frac{1}{2}AD=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$，

所以 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{15}+\sqrt{3})$．

由海伦公式，得 $S_{\triangle PEF}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=3$．

从 $V_{A-PEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle PEF}\cdot h=h$，

由 $V_{A-PEF}=V_{P-AEF}$，得 $h=\frac{2}{3}\sqrt{3}$．

故直线 AD 和 PE 的距离为 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$．

解法2　如图5-5，设异面直线 AD 和 PE 的公垂线段为 FG，过 G 作 $GH\perp AC$，垂足为 H，则 $GH\parallel PA$，连接 FH．

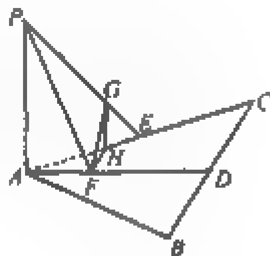


图5-5

因为 $PA\perp$ 平面 ABC，$GH\parallel PA$，所以 $GH\perp$ 平面 ABC，从而 $GH\perp FH$．

又因为 $GF\perp AD$，所以 $HF\perp AD$．

设 $FH=x$，则 $AH=2x$，由 $\frac{GH}{PA}=\frac{EH}{AE}$，得

$$GH=\frac{2(2\sqrt{2}-2x)}{2\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}x.$$

从而 $FG^2=FH^2+GH^2=x^2+(2-\sqrt{2}x)^2=3x^2-4\sqrt{2}x+4$　①

又 $PF^2=PA^2+AF^2=4+(\sqrt{3}x)^2=3x^2+4$，$PE=\sqrt{PA^2+AE^2}=2\sqrt{3}$．

由 $\frac{PG}{PE}=\frac{AH}{AE}$，得 $PG=\frac{2\sqrt{3}\cdot 2x}{2\sqrt{2}}=\sqrt{6}x$．

在 $Rt\triangle PGF$ 中，$FG^2 = PF^2 - GF^2 = 4 - 3x^2$. ②

由 ①、② 得 $3x^2 - 4\sqrt{2}x + 4 = 4 - 3x^2$，即 $3x^2 - 2\sqrt{2}x = 0$.

解得 $x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，代入 ② 得 $FG^2 = \dfrac{4}{3}$.

故 $FG = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

评注 解法1首先将求异面直线 AD 与 PE 的距离转化为求直线 AD 与平面 PEF 的距离，进而转化为求点 A 到平面 PEF 的距离，并应用体积法使问题得到了解决. 解法2是一种代数法，通过两次计算建立了关于 x 的方程.

例4 (2002年湖南省高中数学竞赛试题) 在单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是 AB、BC 的中点，求点 D 到平面 B_1EF 的距离.

分析 过 D 点向平面 B_1EF 作垂线，垂足落在何处？因此，直接求解有一定的困难. 注意到 $\triangle DEF$ 和 $\triangle B_1EF$ 的面积都容易计算，且 B_1B 为平面 DEF 上的高，所以本题可用体积法求解. 当然，本题通过建立空间直角坐标系，利用向量来解决，也是一种不错的选择.

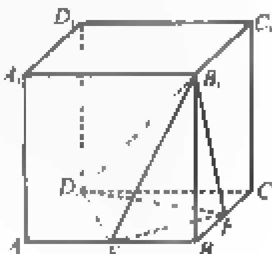


图5-6

解法1 如图5-6，连接 DE、DF、DB_1，由对称性知，$\triangle DEF \cong \triangle B_1EF$，则 $S_{\triangle DEF} = S_{\triangle B_1EF}$.

故点 D 到平面 B_1EF 的距离为 h，由 $V_{D-B_1EF} = V_{B_1-DEF}$，得

$\dfrac{1}{3}S_{\triangle B_1EF}\cdot h = \dfrac{1}{3}S_{\triangle DEF}\cdot B_1B$.

于是，$h = B_1B = 1$.

故点 D 到平面 B_1EF 的距离为1.

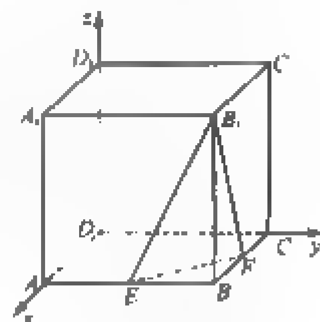


图5-7

解法2 建立空间直角坐标系如图5-7所示，则 $D(0,0,0)$，$B_1(1,1,1)$，$E\left(1,\dfrac{1}{2},0\right)$，$F\left(\dfrac{1}{2},1,0\right)$.

于是，$\overrightarrow{B_1E} = \left(0,-\dfrac{1}{2},-1\right)$，$\overrightarrow{B_1F} = \left(-\dfrac{1}{2},0,-1\right)$.

设平面 B_1EF 的法向量为 $n = (x,y,z)$，则由 $n \perp \overrightarrow{B_1E}$，$n \perp \overrightarrow{B_1F}$，得 $n\cdot\overrightarrow{B_1E} = 0$，$n\cdot\overrightarrow{B_1F} = 0$，即

$$-\frac{1}{2}y - z = 0,\quad -\frac{1}{2}x - z = 0.$$

令 $z = 1$，则 $x = -2$，$y = -2$.

所以 $n = (-2,-2,1)$.

又 $\overrightarrow{DF} = \left(1,\dfrac{1}{2},[illegible]\right)$，故点 D 到平面 B_1EF 的距离为



$$d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|-2\times1-2\times\frac{1}{2}+1\times0\right|}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}}=1.$$

例5 在四面体 $ABCD$ 中，面 ABC 和面 BCD 都是边长为 $2a$ 的等边三角形，且 $AD=2\sqrt{2}a$。设 M、N 分别是棱 AB、CD 的中点，求 M、N 在四面体表面上的最短距离。

分析 在四面体的表面上，由 M 到 N 有四种可能的情形：(1) 由 M 经 AC 到 N；(2) 由 M 经 AD 到 N；(3) 由 M 经 BC 到 N；(4) 由 M 经 BD 到 N。对于每一种情形，为了求 M、N 两点间的最小距离，只须沿所经过的棱，将棱两侧的两个面展开到同一个平面内即可。

解 因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 都是边长为 $2a$ 的正三角形，且 $AD=2\sqrt{2}a$，所以 $AB\perp BD$，$AC\perp CD$，且 $AB=BD=2a$，$AC=CD=2a$。

情形(1)，沿 AC 将 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 展开在同一平面内（见图5-8），由题设知，$CM=\sqrt{3}a$，$CN=a$，$\angle MCN=120°$。在 $\triangle MCN$ 中，由余弦定理，得

$$MN=\sqrt{(\sqrt{3}a)^2+a^2-2\cdot\sqrt{3}a\cdot a\cos120°}=\sqrt{4+\sqrt{3}}a.$$

情形(2)，沿 AD 将 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 展开在同一平面内（如图5-9所示），展开图是边长为 $2a$ 的正方形，则 $MN=2a$。

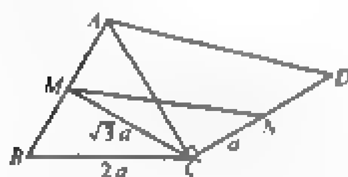


图5-8

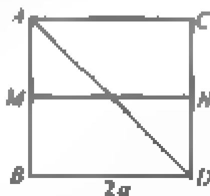


图5-9

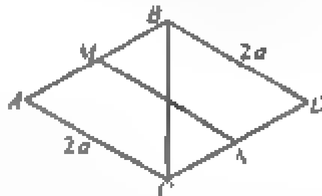


图5-10

情形(3)，沿 BC 将 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 展开在同一平面内（如图5-10所示），展开图是边长为 $2a$，$\angle BAC=60°$ 的菱形，则 $MN=2a$。

情形(4)，沿 BD 将 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 展开在同一平面内，其展开图类似于情形(1)，则 $MN=\sqrt{4+\sqrt{3}}a$。

综上所述，M、N 两点在四面体 $ABCD$ 表面上的最短距离为 $2a$。

评注 利用展开图求几何体表面上两点间距离的最小值，是一种常用的基本方法。

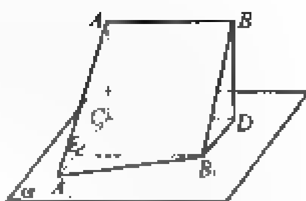
例6 线段 AB 与平面 α 平行，平面 α 的斜线 AA_1、BB_1（A_1、B_1 为斜足）与平面 α 所成的角分别为 $30°$ 和 $60°$，且 $\angle A_1AB=\angle B_1BA=90°$，$AB=a$，$A_1B_1=b(a<b)$。求 AB 与平面 α 的距离。

分析 本题入手并不难，可先过直线 AB 作平面 $\beta\perp\alpha$，交平面 α 于 CD，问题的关键是斜足 A_1、B_1 与交线 CD 的位置关系。因此，本题需要讨论。

解 过点 A、B 分别作 $AC\perp\alpha$，$BD\perp\alpha$，垂足分别为 C、D，连接 CD，则 $AB\mathrel{\underline{\parallel}}CD$



(1) 当斜足 A_1、B_1 在 CD 的同侧时，如图 5-11，过点 B_1 作 $B_1E \perp A_1C$，垂足为 E。由题设知，$\angle AA_1C = 30^\circ$，$\angle BB_1D = 60^\circ$。设 $AC = BD = x$，则 $A_1C = x\cot 30^\circ = \sqrt{3}x$，$EC = B_1D = x\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}x$。


图 5-11

在 $Rt\triangle A_1EB_1$ 中，$A_1B_1 = b$，$B_1E = CD = AB = a$，$A_1E = A_1C - EC = \frac{2}{3}\sqrt{3}x$，由勾股定理，得

$$\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}x\right)^2 = b^2 - a^2, 即 x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{b^2 - a^2}$$


图 5-12

(2) 当斜足 A_1、B_1 在 CD 的异侧时，如图 5-12，过点 A_1 作 $A_1E \perp B_1D$，交 B_1D 延长线于 E，同理可得

$$AC = \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{b^2 - a^2}.$$

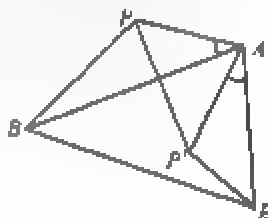
综上所述，直线 AB 与平面 α 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{b^2-a^2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{b^2-a^2}$。

评注　本题并不难，但容易出现漏解现象。因此，要注意因图形位置关系所引起的讨论。

例 7　空间一点 P 到正四面体 $ABCD$ 的顶点 A、B 的距离分别是 2 和 3。当这个正四面体的棱长和位置都变化时，求 P 点到 CD 所在直线的最大距离，并求此时 AB 的长。

分析　由题意知，P 点的轨迹所在平面必与 AB 垂直，取 CD 的中点 E，问题转化为：平面内已知点 P 到 $\triangle ABE$ 顶点 A、B 距离分别为 2、3，当 $\triangle ABE$ 变化时，求 P 到 E 的最大距离。

解　由于四面体确定后，P 点轨迹亦确定，且 P 点轨迹所在平面与 AB 垂直，取 CD 中点 E，当且仅当点 P 在平面 ABE 内，且与 E 在 AB 异侧时，P 点到 CD 距离才取得最大值。于是，问题转化为："已知 P 点到 $\triangle ABE$ 顶点 A、B 距离分别为 2、3，且 $AE = BE = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$，当 $\triangle ABE$ 边长、位置变化时，求 P 到 E 的最大距离。"


图 5-13

如图 5-13，作 $\angle P'AE = \angle PAB$，使 $P'A = \frac{\sqrt{3}}{2}AP$。

因为 $\frac{P'A}{PA} = \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle PAB = \angle P'AE$，所以 $\triangle APB \backsim \triangle AP'E$，从而 $P'E = \frac{\sqrt{3}}{2}PB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$。



又因为 $\frac{AP}{AB}=\frac{AP'}{AE}$，$\angle PAP'=\angle BAE$，所以 $\triangle APP'\backsim\triangle ABE$，于是 $PP'=\frac{\sqrt{3}}{2}PA=\sqrt{3}$.

故 $PE\leqslant PP'+P'E=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

当 PE 取最大值时，P、P'、E 三点共线.

由于 $PA=2$，$\angle APE=\angle ABE$，$PE=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，可得 $\cos\angle APE=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AE=\frac{\sqrt{51}}{2}$，故 $AB=\frac{\sqrt{153}}{3}$.

例 8 如图 5-14，三棱锥 $P-ABC$ 的底面 ABC 与圆锥 SO 的底面 $\odot O$ 都在平面 α 内，且 $\odot O$ 过点 A，又 $\odot O$ 的直径 $AD\perp BC$，垂足为 E. 设棱锥 $P-ABC$ 的所有棱长都是 1，圆锥 SO 的底面直径和母线长也都是 1，求圆锥的顶点 S 到三棱锥三个侧面的距离.

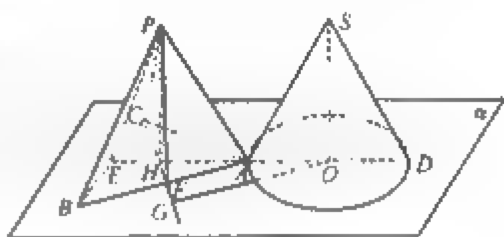


图 5-14

分析 由对称性知，当 S 到侧面 PAB 和侧面 PAC 的距离相等，所以只需求点 S 到侧面 PAB 和侧面 PBC 的距离即可. 由于平面 $PEDS\perp$ 侧面 PBC，且面 $PEDS\cap$ 面 $PBC=PE$，所以点 S 到直线 PE 的距离等于点 S 到侧面 PBC 的距离. 为了求点 S 到侧面 PAB 的距离，我们可将 SO 作适当的平移：连接 CH 并延长交 AB 于 F（H 为顶点 P 在底面 ABC 上的射影），在平面 α 内，过点 O 作 AB 的平行线，交 CF 延长线于 G. 过 G 作 $GS'\perp$ 平面 α，且取 $S'G=SO=\frac{\sqrt{3}}{2}$，点 S' 与 S 在平面 α 的同一侧，则 $S'G\perp\!\!\!\!=SO$. 显然，平面 $PCG\perp$ 侧面 PAB，且面 $PCG\cap$ 面 $PAB=PF$，问题转化为求点 S' 到直线 PF 的距离.

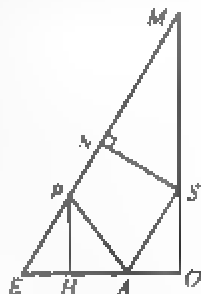


图 5-15

解 先求 S 到侧面 PBC 的距离.

作 $PH\perp AE$，垂足为 H，则 $PH\perp\alpha$，可知 SO、AE、PE 在同一平面 β 上. 设直线 PE 与 SO 的交点为 M（如图 5-15）. 在平面内，作 $SN\perp ME$，垂足为 N，则 SN 的长即为点 S 到侧面 PBC 的距离.

易知 $AE=PE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$EH=\frac{\sqrt{3}}{6}$，$PH=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$OA=\frac{1}{2}$，$SO=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$OE=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$.

由 $\text{Rt}\triangle PHE\backsim\text{Rt}\triangle MOE$，得 $MO=\frac{PH\cdot OE}{EH}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$.



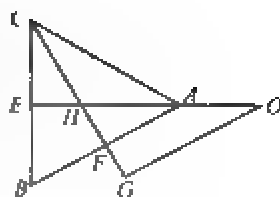


图5-16

从而 $MS=\sqrt{2}+\sqrt{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$ME=\sqrt{OM^2+OE^2}=\frac{3}{2}(1+\sqrt{3})$.

又由 $\mathrm{Rt}\triangle MNS\backsim\mathrm{Rt}\triangle MOE$，得

$$SN=\frac{MO\cdot OE}{ME}=\frac{1}{6}(2\sqrt{2}+2\sqrt{6}-\sqrt{3}).$$

再求点 S 到侧面 PAB 的距离.

连接 CH 交 AB 于 F，并延长到 G，使 $OG\parallel AB$（见图5-16）. 过 G 作 $GS'\perp$ 平面 α，且取 $S'G=SO=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S'$ 与 S 均在 α 的同一侧.

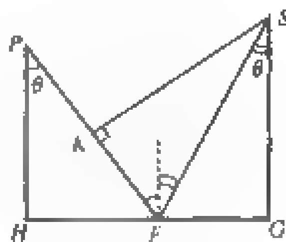


图5-17

连接 PF，则 $PF\perp AB$，$AB\perp$ 平面 PHF，$S'G$ 在平面 PHF 内. 连接 $S'S$，则 $S'S\parallel AB$. 作 $S'K\perp PF$，垂足为 K（见图5-17），则 $S'K$ 的长即为点 S 到侧面 PAB 的距离.

易知 $FG=\frac{1}{4}$. 设 $\angle FPH=\theta$，$\angle FS'G=\phi$，则 $\tan\theta=\frac{FH}{PH}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\tan\phi=\frac{FG}{S'G}=\frac{FG}{SO}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

从而 $\tan(\theta+\phi)=\frac{6\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{24-\sqrt{6}}$.

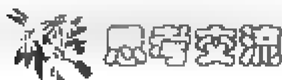
所以 $\sin(\theta+\phi)=\frac{2}{\sqrt{39}}+\frac{1}{3\sqrt{26}}$.

又 $S'F=\sqrt{S'G^2+FG^2}=\frac{\sqrt{13}}{4}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle S'KF$ 中，有

$S'K=S'F\sin(\theta+\phi)=\frac{1}{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

综上所述，点 S 到侧面 PBC 的距离为 $\frac{1}{6}(2\sqrt{2}+2\sqrt{6}-\sqrt{3})$，点 S 到侧面 PAB 和侧面 PAC 的距离均为 $\frac{1}{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

评注 上述解法的关键是将求点到平面的距离转化为求点到直线的距离. 本题还可以用体积法来解，留给读者去完成.



思考交流

思考题1 在直二面角 $\alpha-AB-\beta$ 中，$AB\subset\alpha$，$CD\subset\beta$，且 $\angle BAC=\theta$，$\angle ACD=\varphi$，



$AC=a$，求直线 AB 和 CD 间的距离.

分析 注意到异面直线的距离，是分别在两条异面直线上的两点距离中的最小者，根据已知条件，本题适宜用极值法求解.

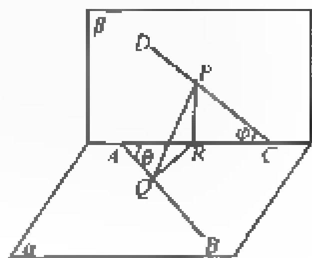


图5-18

解 如图5-18，在 CD 上任取一点 P，过 P 作 $PR\perp AC$，垂足为 R，则 $PR\perp$ 面 α. 在面 α 内，过 R 作 $RQ\perp AB$，垂足为 Q，连接 PQ，由三垂线定理知，$PQ\perp AB$.

设 $CR=x$，则 $AR=a-x$，$PR=x\tan\varphi$，$QR=(a-x)\sin\theta$.

从而 $PQ^2=PR^2+QR^2=x^2\tan^2\varphi+(a-x)^2\sin^2\theta$

$$=(\sin^2\theta+\tan^2\varphi)x^2-2a\sin^2\theta\cdot x+a^2\sin^2\theta.$$

当 $x=\dfrac{a\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\tan^2\varphi}$ 时，

$$PQ^2_{\min}=\frac{a^2\sin^2\theta\cdot\tan^2\varphi}{\sin^2\theta+\tan^2\varphi}=\frac{a^2}{\csc^2\theta+\cot^2\varphi}=\frac{a^2}{1+\cot^2\theta+\cot^2\varphi}.$$

故异面直线 AB 和 CD 间的距离为 $\dfrac{a}{\sqrt{1+\cot^2\theta+\cot^2\varphi}}$.

评注 若二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的大小为 $\delta(0<\delta<\pi)$，则 AB 和 CD 间的距离可类似求出为

$$d=\frac{a\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\delta-\cot^2\theta+\cot^2\varphi+2\cot\theta\cot\varphi\cos\delta}}.$$

上面的两个公式在求异面直线间的距离时很有效. 如在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，记棱长为 a，则 AB_1 与 BD 间的距离为 $d=\dfrac{a}{\sqrt{1+\cot^2 45^\circ+\cot^2 45^\circ}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

思考题2 已知 $ABCD$ 是边长为4的正方形，E、F 分别是 AB、AD 的中点，PE 垂直于正方形 $ABCD$ 所在的平面，且 $PC=2$. 求点 B 到平面 PEF 的距离.

分析 求点到平面的距离可转化为求直线到平面的距离，线面距离可以在它们的公垂面内找到. 连接 BD，则 $BD\parallel EF$，从而 $BD\parallel$ 平面 PEF，故点 B 到平面 PEF 的距离等于直线 BD 到平面 PEF 的距离. 又 $EF\perp$ 平面 PAC，则面 PAC 为直线 BD 与平面 PEF 的公垂面. 设 EF 与 AC 相交于 H，作 $OK\perp PH$（O 为正方形 $ABCD$ 的中心），垂足为 K，则 OK 的长为点 B 到平面 PEF 的距离.

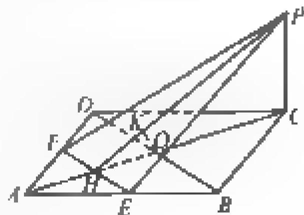


图5-19

解法1 如图5-19，设对角线 AC、BD 相交于 O 点，EF 交 AC 于 H，连接 PE、PF、PH.

因为 $BD\parallel EF$，所以 $BD\parallel$ 平面 PEF.

故点 B 到平面 PEF 的距离等于点 O 到平面 PEF 的距离. 易知 H 为 EF 的中点，$PH\perp EF$，$PC\perp EF$，所以 $EF\perp$ 平面 PCH.

过 O 点作 $OK \perp$ 平面 PEF，则垂足 K 在 PH 上.

在 $Rt\triangle PCH$ 中，$CH = \frac{3}{4}AC = 3\sqrt{2}$，$PC = 2$，则 $PH = \sqrt{PC^2 + CH^2} = \sqrt{22}$

从而 $\sin\angle PHC = \frac{PC}{PH} = \frac{2}{\sqrt{22}}$.

在 $Rt\triangle OKH$ 中，$OK = OH\sin\angle PHC = \frac{2\sqrt{11}}{11}$.

解法 2 将已知图形补成以 A、B、C、D、P 为顶点的长方体（如图 5-20）.延长 FE、CB 交于 M，连接 PM 交 BB' 于 N. 在 $Rt\triangle EBM$ 中，作 $BQ \perp ME$，垂足为 Q，连接 NQ，则 $NQ \perp ME$. 在 $Rt\triangle NBQ$ 中，作 $BK \perp NQ$，垂足为 K. 由 $ME \perp$ 平面 NBQ 知，$BK \perp ME$. 从而 $BK \perp$ 平面 PEF，即 BK 的长为点 B 到平面 PEF 的距离.

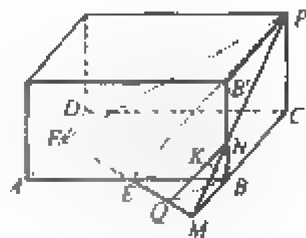


图 5-20

在 $Rt\triangle EBM$ 中，$\angle BEM = 45^\circ$，则 $BQ = \frac{BE}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. 又 $BN = \frac{1}{3}PC = \frac{2}{3}$，所以 $NQ = \sqrt{BQ^2 + BN^2} = \frac{\sqrt{22}}{3}$.

故 $BK = \frac{BN \cdot BQ}{NQ} = \frac{2\sqrt{11}}{11}$ 为点 B 到平面 PEF 的距离.

评注 长方体是一个重要的几何体.通过构造长方体，把求点到平面的距离转化为求点到直线的距离，使问题变得简单、明了. 本题还可以应用体积法和向量法求解，请读者自己去完成.

同步检测5

一、选择题

1. 在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，下列说法正确的是 …… ( )
   A. 直线 A_1B 与 CD_1 是距离为 a 的异面直线
   B. 异面直线 AA_1 与 BC 的公垂线是 A_1B_1
   C. 异面直线 AA_1 与 BC 的公垂线是 a
   D. 异面直线 AA_1 与 BC 的公垂线是 AB

2. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB = 3$，$BC = 4$，$PA \perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA = 1$，则 P 点到直线 BD 的距离为 …………………………………………………………… ( )



A. $\frac{13}{5}$　　B. $\frac{17}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{29}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{119}}{5}$

3. 设正$\triangle ABC$所在平面外一点P到三个顶点A、B、C的距离相等，且点P到平面ABC的距离为$2\sqrt{3}$，PA与BC的距离为3，则点A到平面PBC的距离为　(　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $3\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

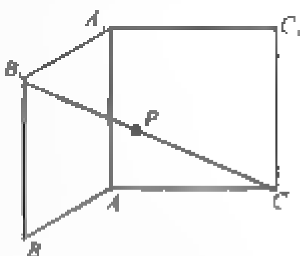


图5-21

4. 如图5-21，两个全等的正方形AA_1B_1B与AA_1C_1C成直二面角，取线段B_1C内一点P，记P到AB的距离为d_1，P到A_1C_1的距离为d_2，则……(　)

A. $d_1>d_2$　　B. $d_1<d_2$

C. $d_1=d_2$　　D. d_1与d_2的大小关系不能确定

5. 已知正四棱锥$S-ABCD$的高为2，底面边长为$\sqrt{2}$，P、Q分别是线段BD、SC上的点，则P、Q两点间的最短距离为……(　)

A. 1　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

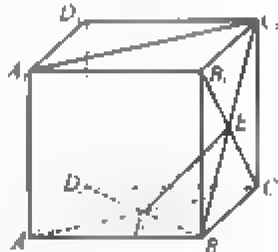


图5-22

6. 如图5-22，在棱长为a的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E、F分别是面BCC_1B_1和$ABCD$的中心，则异面直线EF与A_1C_1的距离为……(　)

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}a$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$　　D. $\frac{a}{2}$

7. 二面角$\alpha-l-\beta$的平面角为$120°$，在半平面α内，$AB\perp l$于B，$AB=2$；在半平面β内，$CD\perp l$于D，$CD=3$。若$BD=1$，M是棱l上的一个动点，则$AM+CM$的最小值为……(　)

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $2\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{26}$

8. 正方形$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为a，棱AA_1、CC_1的中点分别为E、F，则直线A_1C到截面$EBFD$的距离为……(　)

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}a$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{12}a$　　C. $\frac{5}{6}a$　　D. $\frac{7}{18}a$

二、填空题

9. 在棱长为a的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，过A_1、B_1、C_1三点的平面与正方体下



底面 $ABCD$ 所在平面的交线为 l，则直线 l 与 A_1C_1 间的距离为____

10. 正方体表面正方形的对角线所在直线中存在异面直线，如果其中两条异面直线间的距离为 1，那么这个正方体的棱长为____

11. 已知 P 为 $\triangle ABC$ 所在的平面外的一点，E 为 PA 的中点，且 $BE \perp AC$，$PC \perp AC$，若 $PA = a$，$PC = b$，则异面直线 BE 和 PC 的距离是____

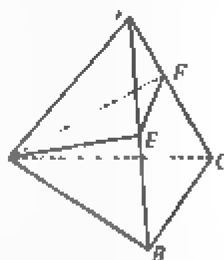


图 5-23

12. 如图 5-23，在侧棱长为 $2\sqrt{3}$ 的正三棱锥 $V-ABC$ 中，$\angle AVB = \angle BVC = \angle CVA = 40°$，过点 A 作截面 AEF 与侧棱 VB、VC 分别交于 E、F，则截面 $\triangle AEF$ 的周长的最小值为____。

13. 在空间四边形 $VABC$ 中，$AB = BC = 2a$，$\angle ABC = 120°$，$VA \perp$ 平面 ABC，$VB = 3a$，则点 A 到平面 VBC 的距离为____

14. 三棱锥 $V-ABC$ 的三条侧棱两两垂直，P 是底面 $\triangle ABC$ 内一点，且点 P 到三个侧面的距离分别为 2，3，6，则点 P 到顶点 V 的距离为____

15. 将给定的两个全等的正三棱锥的底面粘在一起，恰好得到一个二面角都相等的六面体，且该六面体的最短棱的长为 2，则该六面体最远的两个顶点间的距离是____

16. 在长方体的相邻三个面中，有两个面的对角线长分别为 4 和 5，则第三个面的对角线长的取值范围是____.

三、

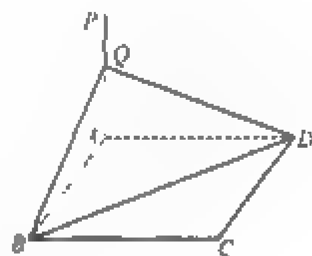


图 5-24

17. 如图 5-24，P 为矩形 $ABCD$ 所在平面外一点，且 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，若 Q 为 PA 的中点，$AB = a$，$BC = b$，$PA = c$，求：

(1) 点 Q 到直线 BD 的距离.

(2) 点 P 到平面 QBD 的距离.

18. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1.

(1) 求证：平面 AB_1C // 平面 A_1C_1D；

(2) 求平面 AB_1C 与平面 A_1C_1D 的距离.

19. (1992 年全国高中数学联赛试题) 设 l、m 是两条异面直线，在 l 上有 A、B、C 三点，且 $AB = BC$，过 A、B、C 分别作 m 的垂线 AD、BE、CF，垂足依次为 D、E、F，已知 $AD = \sqrt{15}$，$BE = \frac{7}{2}$，$CF = \sqrt{10}$，求 l 与 m 的距离.

20. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 为棱 AA_1 的中点，过顶点 A、B_1、C 作圆 Γ，设 P 是圆 Γ 上任意一点，求线段 PM 长的取值范围.



第6讲 空间中的角

知识点金

1. 两条异面直线所成的角

两条异面直线所成的角是通过相交直线的夹角来定义的，根据等角定理，该角的大小与顶点 O 的位置无关. 因此，作两条异面直线所成的角常用平移转化法，平移时要注意利用三角形的中位线.

两条异面直线所成角的范围是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

设 l_1、l_2 是两条异面直线，n 是与公垂线段 AB 平行的向量，其中垂足 A、B 分别在 l_1、l_2 上，又 C、D 分别是 l_1、l_2 上的任意两点，则 l_1 与 l_2 的夹角为 $\arccos\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|}$.

2. 直线和平面所成的角

平面的一条斜线和它在这个平面内的射影所夹的角，叫做这条斜线和这个平面所成的角. 如果直线和平面平行或直线在平面内，那么这条直线和这个平面所成的角为 0；如果直线和平面垂直，那么这条直线和这个平面所成的角为 $\frac{\pi}{2}$. 因此，直线和平面所成的角的范围是 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

最小角定理 平面的斜线和它在平面内的射影所成的角，是这条斜线和这个平面内的直线所成角中最小的角.

设 A 为平面 α 外一点，B 为 α 内一点，n 是平面 α 的法向量，则直线 AB 与平面 α 所成的角为 $\arcsin\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot n|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|n|}$.



3. 二面角

从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角，其中这条直线叫做这个二面角的棱. 在二面角的棱上任取一点 O，过 O 点在两个半平面内分别作棱的垂线 OA、OB，则 $\angle AOB$ 叫做这个二面角的平面角. 二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角也可以这样作：在棱 l 上任取一点 O，过 O 点作 l 的垂面，且与两个半平面 α、β 的交线分别是射线 OA、OB，则 $\angle AOB$ 为二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角.

二面角的范围在课本中没有明确给出，一般是指 $(0,\pi)$，解题时要注意图形的位置和题目的要求.

作二面角的平面角常有三种方法：① 根据定义；② 过棱上一点作棱的垂面，垂面与两个半平面的交线所夹的角即为二面角的平面角；③ 利用三垂线定理或其逆定理.

另外，面积射影定理也是求二面角大小的一种常用方法，它可以回避作出二面角的平面角.

设 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 分别是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的面 α、β 的法向量，则 $\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$ 就是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角或其补角的大小.



例 1 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为棱 AA_1、BB_1 的中点，G 为棱 BC 上一点，若 $D_1F\perp FG$，则异面直线 C_1F 与 EG 所成的角为…………………………（　）

A. $\dfrac{\pi}{3}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

分析 本题的关键是先由 $D_1F\perp FG$ 确定 G 点在 BC 上的位置，再通过平移求异面直线 C_1F 与 EG 所成角的大小. 因此，本题可用代数与几何的综合法来解，也可以用向量法求后者可能会更简单一些.

解法 1 不妨设正方体的棱长为 1，记 $BG=x$，则 $FG^2=BG^2+BF^2=x^2+\dfrac{1}{4}$，$D_1F^2=B_1D_1^2+B_1F^2=\dfrac{9}{4}$.

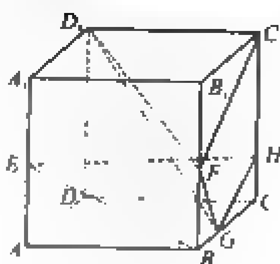
又根据长方体的性质，得

$$D_1G^2=CD^2+CG^2+DD_1^2=x^2-2x+3.$$

由 $D_1F\perp FG$，得 $D_1F^2+FG^2=D_1G^2$，即 $\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{9}{4}=x^2-2x+3$

解得 $x=\dfrac{1}{4}$，即 $BG=\dfrac{1}{4}$.



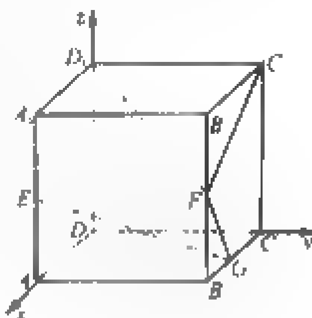

图6-1

如图6-1，过G作$GH \parallel FC_1$，交CC_1于H，则$\angle EGH$（或补角）为异面直线C_1F与EG所成的角.

在$\triangle EGH$中，$EG^2=\frac{21}{16}$，$GH^2=\frac{45}{64}$，$EH^2=\frac{129}{64}$，则$EG^2+GH^2=\frac{129}{64}=EH^2$，所以$\angle EGH=90^\circ$.

故异面直线C_1F与EG所成的角为$\frac{\pi}{2}$，选B.

解法2 建立空间直角坐标系如图6-2所示，设正方体棱长为1，则$E\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$，$F\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$，$C_1(0,1,1)$，$D_1(0,0,1)$. 又设$G(m,1,0)$，于是$\overrightarrow{EG}=\left(m-1,1,-\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{D_1F}=\left(1,1,-\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{FG}=\left(m-1,0,-\frac{1}{2}\right)$.


图6-2

由$D_1F \perp FG$，得$\overrightarrow{D_1F}\cdot\overrightarrow{FG}=0$，即$(m-1)+\frac{1}{4}=0$，得$m=\frac{3}{4}$.

于是，$\overrightarrow{EG}=\left(-\frac{1}{4},1,-\frac{1}{2}\right)$.

又$\overrightarrow{C_1F}=\left(1,0,-\frac{1}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{C_1F}=0$，即$EG \perp C_1F$.

故直线EG与C_1F所成的角为$\frac{\pi}{2}$，选B.

评注 上面给出了本题的两种解法，它们都是求异面直线所成角的基本方法. 解法1先通过代数计算确定了点G的位置，然后利用平移确定了两条异面直线所成的角，最后通过解三角形求出这个角的大小，运算量较大. 解法2应用了向量的方法，简便易行，应予以掌握.

例2 如图6-3，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M为棱AA_1的中点，则二面角$C-MD-B$的大小为________.

分析 如果用几何方法去求二面角$C-MD-B$的大小，那么如何去作二面角$C-MD-B$的平面角？这是我们遇到的最大的困难. 若注意到$C-MD-D_1$、$C-MD-B$和$B-MD-A$这三个二面角的和为定值π，且$C-MD-D_1$、$B-MD-A$这两个二面角的大小又比较容易求，就可采用求差的方法来解决. 当然，本题用向量法可能会更简单.



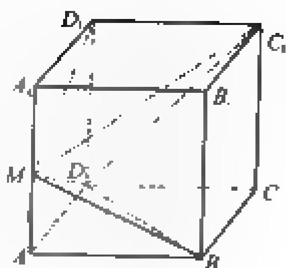


图6-3

解法1 如图6-3，记二面角C_1-MD-B的平面角为θ，二面角C_1-MD-D_1和$B-MD-A$的平面角分别为α、β，则$\theta+\alpha+\beta=\pi$，从而$\theta=\pi-(\alpha+\beta)$.

不妨设正方体的棱长为2，则

$$S_{\triangle D_1MD}=2, S_{\triangle AMD}=1.$$

又$MB=MD=\sqrt{5}$，$C_1M=3$，$BD=C_1D=2\sqrt{2}$，所以由海伦公式，得$S_{\triangle C_1MD}=3$，$S_{\triangle BMD}=\sqrt{6}$.

从而$\cos\alpha=\dfrac{S_{\triangle D_1MD}}{S_{\triangle C_1MD}}=\dfrac{2}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{S_{\triangle AMD}}{S_{\triangle BMD}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

于是$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\sin\beta=\sqrt{\dfrac{5}{6}}$.

故$\cos\theta=-\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\times\sqrt{\dfrac{5}{6}}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，即$\theta=\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

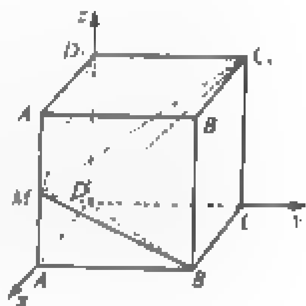


图6-4

解法2 建立空间直角坐标系如图6-4所示，设正方体的棱长为1，则$D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$M\left(1,0,\dfrac{1}{2}\right)$，$C_1(0,1,1)$.

于是$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DM}=\left(1,0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$.

设平面BMD的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则由$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DB}$，$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DM}$，得$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DB}=0$，$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DM}=0$，即$x_1+y_1=0$，$x_1+\dfrac{1}{2}z_1=0$.

令$z_1=1$，得$x_1=-2$，$y_1=2$，即$\boldsymbol{n}_1=(-2,2,1)$.

同理，平面C_1MD的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=(2,1,-1)$.

故$\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

于是，二面角C_1-MD-B的大小为$\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

评注 解法1应用了补集的思想，有一定的技巧性，值得重视. 解法2利用了向量法，显得自然，流畅.

例3 PA、PB、PC是从P点出发的三条射线，每两条射线的夹角均为$60°$，试求直线PC与平面PAB所成角的余弦值.

分析 如果用任意的平面去截这三条射线，将会给后面的计算造成困难. 若注意到正方体从一个顶点出发的三条面对角线两两的夹角均为$60°$，则可利用正方体这一工具



来解决．

解 构造正方体如图 6-5 所示．过点 C 作 $CO\perp$ 平面 PAB，垂足为 O，则 O 为正 $\triangle PAB$ 的中心，于是 $\angle CPO$ 为直线 PC 与平面 PAB 所成的角．

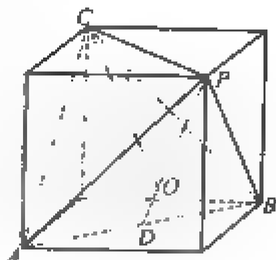


图 6-5

设 $PC=a$，则 $PO=\frac{2}{3}PD=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，故 $\cos\angle CPO=\frac{PO}{PC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即直线 PC 与平面 PAB 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$．

评注 正方体是立体几何中的一个最简单的几何体，也是一个很重要的几何模型，许多立体几何问题都可以通过构造正方体得到简捷地解决．

例 4 （1998 年北京市高一复赛试题）在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面正方形 $ABCD$ 的边长为 a，侧棱 $SA=SB=SC=SD=2a$，M 为棱 SA 的中点，N 为棱 SC 的中点，求异面直线 DM 与 BN 所成角的余弦值．

分析 注意到四棱锥的侧棱都相等，所以可利用平行四边形的性质进行平移转化，再通过解三角形来求角的大小．如果用向量法来解，可回避作这两条异面直线所成的角，将求角的问题转化为代数运算．

解法 1 如图 6-6，延长 BN 到 P，使 $NP=BN$；延长 DM 到 Q，使 $MQ=DM$，则 $BCPS$ 和 $ADSQ$ 都是平行四边形．

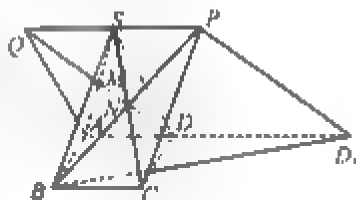


图 6-6

因为 $SP \underline{\parallel} BC \underline{\parallel} AD \underline{\parallel} QS$，所以 Q、S、P 三点共线，且 $PQ=2BC=2AD=2a$．

过点 P 作 QD 的平行线交 AD 延长线于 D_1，则 $PQDD_1$ 为平行四边形，故 $\angle BPD_1$（或补角）为异面直线 BN 与 DM 所成的角．

易知 $PD_1=QD$，$DD_1=PQ=2a$，则 $AD_1=3a$．

在 $Rt\triangle BAD_1$ 中，$BD_1^2=AB^2+AD_1^2=10a^2$．

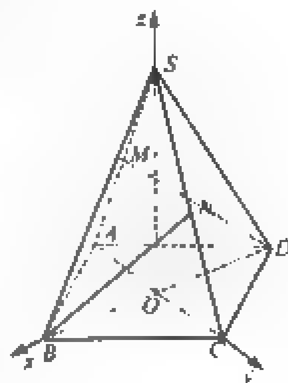


图 6-7

在▱$BCPS$ 中，$SC^2+BP^2=2BC^2+2BS^2$，即 $BP=\sqrt{6}a$，所以 $PD_1=QD=BP=\sqrt{6}a$．

在 $\triangle PBD_1$ 中，由余弦定理，得

$$\cos\angle BPD_1=\frac{6a^2+6a^2-10a^2}{2\cdot\sqrt{6}a\cdot\sqrt{6}a}=\frac{1}{6}.$$

解法 2 如图 6-7，以底面对角线的交点 O 为原点，OB、OC、OS 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，则 $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，

$C\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，$A\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$S\left(0,0,\frac{\sqrt{14}}{2}a\right)$

因为 M、N 分别为 SA、SC 的中点，所以 $M\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{14}}{4}a\right)$，$N\left(0,\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{14}}{4}a\right)$

于是，$\overrightarrow{DM}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,-\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{14}}{4}a\right)$，$\overrightarrow{BN}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{14}}{4}a\right)$

故 $\cos\langle\overrightarrow{DM},\overrightarrow{BN}\rangle=\frac{\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{DM}|\cdot|\overrightarrow{BN}|}=\frac{1}{6}$，即异面直线 DM 与 BN 所成角的余弦值为$\frac{1}{6}$.

例5 如图6-8，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$PA\perp$ 平面 ABC，DE 垂直平分 PC，且分别交 AC、PC 于 D、E，又 $PA=AB$，$PB=BC$，求以 BD 为棱，以 BDE 和 BDC 为面的二面角的度数.

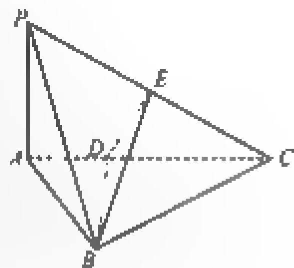


图6-8

分析 本题的关键是确定二面角 $E-BD-C$ 的平面角. 拿到题目，我们感到 $\angle EDC$ 很像是二面角 $E-BD-C$ 的平面角，这是一个很好的念头！我们或者去证实它，或者去否定它. 这只须证明 BD 是否垂直于平面 PAC 即可. 当然，本题还有更精彩的解法在后面.

解法1 先证明 $\angle EDC$ 是二面角 $E-BD-C$ 的平面角.

因为 E 为 PC 的中点，且 $PB=BC$，所以 $BE\perp PC$.

又因为 $DE\perp PC$，所以 $PC\perp$ 平面 BDE.

从而 $BD\perp PC$.

又 $PA\perp$ 平面 ABC，所以 $BD\perp PA$.

故 $BD\perp$ 平面 PAC，即 $\angle EDC$ 为所求二面角的平面角.

再计算 $\angle EDC$ 的度数.

设 $PA=AB=a$，则 $PB=BC=\sqrt{2}a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3}a$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAC$ 中，由 $\tan\angle PCA=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\angle PCA=30°$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle DEC$ 中，$\angle EDC=90°-30°=60°$.

解法2 同解法1，得 $PC\perp$ 平面 BDE.

又 $PA\perp$ 平面 ABD，且 P 是二面角 $A-BD-E$ 内一点，所以 $\angle APE$ 与二面角 $A-BD-E$ 的平面角互补，从而 $\angle APE$ 等于所求二面角 $E-BD-C$ 的平面角.

同解法1，得 $\angle PCA=30°$，从而 $\angle APE=60°$.



解法3 同解法1，可证$\angle EDC$为二面角$E-BD-C$的平面角．设$\angle PCB=\theta$，$\angle PCA=\theta_1$，$\angle ACB=\theta_2$．

因为$PA\perp$平面ABC，$BC\perp AB$，所以$BC\perp PB$．

又E是PC的中点，所以$\theta=45^\circ$，即$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

在$Rt\triangle ABC$中，易知$\cos\angle ACB=\cos\theta_2=\frac{\sqrt{6}}{3}$．

由三余弦公式，得$\cos\theta_1=\frac{\cos\theta}{\cos\theta_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$\theta_1=30^\circ$．

故$\angle EDC=60^\circ$．

评注 解法1体现了立体几何的学科特点，如线面间的垂直关系，三垂线定理，二面角等．解法2回避了确定二面角$E-BD-C$的平面角．解法3在确定二面角的平面角后，应用了三余弦定理，避免了复杂的运算．总之，这是一道既要论证又要计算，难度适中，思路宽广的好题．

例6 如图6-9，设平面AC和平面BD相交于BC，它们所成的二面角为45°，P为面AC内的一点，Q为面BD内的一点．已知直线MQ是直线PQ在平面BD内的射影，并且M在棱BC上．又设PQ与平面BD所成的角为β，$\angle CMQ=\theta(0^\circ<\theta<90^\circ)$，线段$PM$的长为$a$，求线段$PQ$的长．

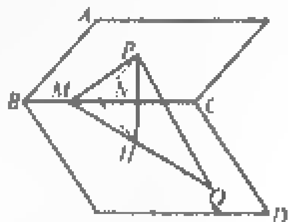


图6-9

分析 虽然所求线段PQ与已知线段PM都在$\triangle PMQ$内，但由于只有$PM=a$和$\angle PQM=\beta$，要求PQ还是显得条件不足，所以我们必须设法应用条件$\angle CMQ=\theta$和二面角的度数45°．注意到PQ在平面BD上的射影为MQ，可利用三垂线定理先作出二面角的平面角，有了较完整的图形，再用a、θ、β表示PQ就不难了．

解 如图6-9，过点P作$PH\perp$平面BD，因为直线PQ在平面BD上的射影为MQ，则垂足H必在直线MQ上．再过点H作$HN\perp BC$，垂足为N，连接PN，由三垂线定理知，$PN\perp BC$，故$\angle PNH$为二面角$A-BC-D$的平面角，即$\angle PNH=45^\circ$．

依题意，$\angle PQM=\beta$，设$PQ=x$，则在$Rt\triangle PHQ$中，$PH=PQ\sin\beta=x\sin\beta$．

在$Rt\triangle PHN$中，$HN=PH\cot45^\circ=x\sin\beta$，$PN=\frac{PH}{\sin45^\circ}=\sqrt{2}x\sin\beta$．

在$Rt\triangle MNH$中，$MN=HN\cot\theta=x\sin\beta\cot\theta$．

在$Rt\triangle PNM$中，由勾股定理，得

$PN^2+MN^2=PM^2$，

即$2x^2\sin^2\beta+x^2\sin^2\beta\cot^2\theta=a^2$．



解得 $x=\dfrac{a\sin\theta}{\sin\beta\sqrt{1+\cos^2\theta}}$.

评注 (1) 本题涉及的知识点较多，补画出完整的图形，是解答此题的基础. (2) 利用方程的思想，通过三角形的边角关系，把已知量 a、θ、β 和未知数 x 都集中到 $\mathrm{Rt}\triangle PNM$ 中，利用勾股定理建立了关于 x 的方程，这也是解答立体几何计算题的一种常用策略.

例 7 如图 6-10，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=m$，O 为其中心，$EO\perp$ 平面 $ABCD$，$EO=n$，且在 BC 边上存在唯一的点 F，使得 $EF\perp FD$. 问 m、n 满足什么条件时，平面 DEF 与平面 $ABCD$ 所成的角为 60°？并说明理由.

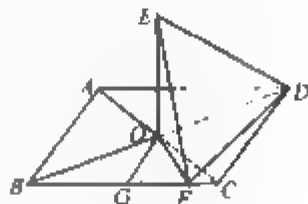


图 6-10

分析 这是一个条件探索性问题，可引入线段参数 $CF=x$，从结论入手，结合已知条件和图形的特点，通过解三角形建立关于 m、n 和 x 的方程，再根据 x 的确定性和唯一点，确定 m、n 的值或它们应满足的等量关系.

解 设 $CF=x$，过点 O 作 $OG\perp BC$，垂足为 G，则 $GF=\dfrac{m}{2}-x$，$OG=\dfrac{1}{2}$.

于是，$EF^2=EO^2+OG^2+GF^2=n^2+\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{m}{2}-x\right)^2=x^2-mx+\dfrac{m^2}{4}+n^2+\dfrac{1}{4}$，

$DF^2=CD^2+CF^2=1+x^2$，$DE^2=OD^2+OE^2=n^2+\left(\dfrac{\sqrt{1+m^2}}{2}\right)^2=\dfrac{m^2}{4}+n^2+\dfrac{1}{4}$.

因为 $EF\perp FD$，所以 $EF^2+DF^2=DE^2$，即

$\left(x^2-mx+\dfrac{m^2}{4}+n^2+\dfrac{1}{4}\right)+1+x^2=\dfrac{m^2}{4}+n^2+\dfrac{1}{4}$，亦即 $2x^2-mx+1=0$.

因为点 F 存在且唯一，所以 $\Delta=m^2-8=0$，得 $m=2\sqrt{2}$，从而 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为 $EO\perp FD$，$EF\perp FD$，所以 $FD\perp$ 平面 OEF，从而 $FD\perp OF$，故 $\angle EFO$ 为平面 DEF 与平面 $ABCD$ 所成的角，即 $\angle EFO=60^\circ$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EOF$ 中，$\cos\angle EFO=\dfrac{OF}{EF}=\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{m}{2}-x\right)^2}}{\sqrt{x^2-mx+\dfrac{m^2}{4}+n^2+\dfrac{1}{4}}}=\sqrt{\dfrac{3}{4n^2+3}}=\dfrac{1}{2}$，

解得 $n=\dfrac{3}{2}$.

故当 $m=2\sqrt{2}$，$n=\dfrac{3}{2}$ 时，平面 DEF 与平面 $ABCD$ 所成的角为 60°.



评注　这是由一道常见题目改变而来的题，具有较强的综合性．解题的关键有两个：一是由 $EF^2+DF^2=DE^2$ 建立关于 x，m 的方程，由点 F 的唯一性，利用判别式确定 x、m 的值，二是由面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角为 60°，确定 n 的值．

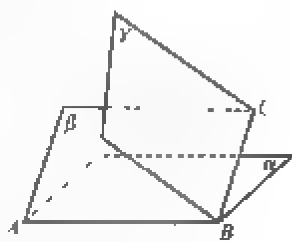


图 6-11

例 8　(第1届希望杯数学邀请赛试题)如图 6-11，已知 $AB\perp BC$，锐二面角 $\alpha-AB-\beta=\theta_1$，锐二面角为 $\beta-AB-\gamma=\theta_2$，平面 γ 和平面 α 成锐二面角 θ．求证：$\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2=\cos\theta$．

分析　从何入手？难度似乎很大．从三个半平面的特点考虑，可从构造长方体入手．注意到结论只涉及到三个角 θ、θ_1、θ_2 的余弦，而没有给出长度关系，可设法利用面积射影公式，使问题得到解决．

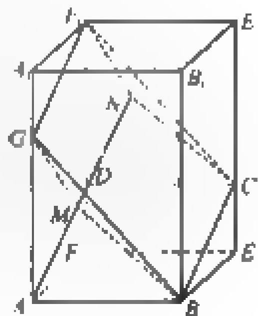


图 6-12

证明　构造如图 6-12 所示的长方体 $ABEF-A_1B_1E_1F_1$，使矩形 $ABEF$ 在平面 α 内，平面 β 与棱 EE_1、FF_1 分别交于点 C、D，则矩形 $ABCD$ 在平面 β 内，平面 γ 与棱 FF_1、AA_1 分别交于点 F_1、G，则平行四边形 BCF_1G 在平面 γ 内．

因为矩形 $ABCD$ 和 $\square BCF_1G$ 在底面 $ABEF$ 上的射影同为矩形 $ABEF$，又平面 $ABCD$ 和平面 BCF_1G 与平面 $ABEF$ 所成的锐二面角分别为 θ_1 和 θ，所以

$$\cos\theta_1=\frac{S_{ABEF}}{S_{ABCD}},\qquad ①$$

$$\cos\theta=\frac{S_{ABEF}}{S_{BCF_1G}}.\qquad ②$$

因此，平面 $ADF_1G\perp$ 平面 $ABCD$，且它们的交线为 AD．

作 $GM\perp AD$，$F_1N\perp AD$，垂足分别为 M、N，则 $GM\perp$ 平面 $ABCD$，$F_1N\perp$ 平面 $ABCD$．

从而，$\square BCF_1G$ 在平面 $ABCD$ 内的射影为四边形 $BCNM$．

又平面 BCF_1G 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角为 θ_2，所以

$$\cos\theta_2=\frac{S_{BCNM}}{S_{BCF_1G}}.\qquad ③$$

因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以四边形 BCF_1G 为平行四边形．从而 $AD\parallel BC\parallel F_1G$，且 $AD=BC=F_1G$．

故四边形 ADF_1G 为平行四边形．

由 $GM\perp AD$，$F_1N\perp AD$ 知，$AM=DN$．

又 $\angle MAB=\angle NDC$，$AB=DC$，所以 $\triangle ABM\cong\triangle DCN$．

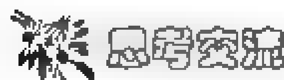
有 $S_{BCNM}=S_{ABCD}$．　④

由③、④得 $\cos\theta_2=\dfrac{S_{\triangle BEF}}{S_{BEF_1}}$. ⑤

由①、⑤得 $\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2=\dfrac{S_{ABEF}}{S_{BEF_1G}}$. ⑥

由②、⑥得 $\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2=\cos\theta_3$.

评注 本题主要应用了面积射影公式，回避了作二面角的平面角



思考题 1 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形，$PA\perp$ 平面 ABC，且 $PA=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. 设 A 点关于平面 PBC 的对称点为 A'，求直线 $A'C$ 与 AB 所成的角.

分析 要作出异面直线 $A'C$ 与 AB 所成的角并不难，难的是下一步的计算. 为此，我们可以从判断异面直线 $A'C$ 与 AB 的位置关系入手. 注意到点 A' 与 A 关于平面 PBC 对称，有 $A'B=AB$，$A'C=AC$，从而 $A'B=AB=A'C=AC=BC=1$，所以只要能证明 $A'A=1$，则四面体 $A'ABC$ 为正四面体，于是有 $A'C\perp AB$. 要证明 $A'A=1$，可通过计算来完成. 当然，本题也可以用向量法来解决.

解法 1 如图 6-13，设 AA' 与平面 PBC 相交于点 O，取 BC 的中点 D，则 O 点在 PD 上.

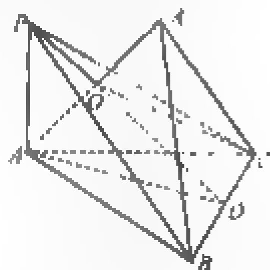


图 6-13

在 $Rt\triangle PAD$ 中，$AO\perp PD$，$PA=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，$AD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $PD=\sqrt{PA^2+AD^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

由面积关系，得 $AO=\dfrac{PA\cdot AD}{PD}=\dfrac{1}{2}$.

从而 $A'A=2AO=1$.

又点 A' 与 A 关于平面 PBC 对称，所以 $A'B=AB=1$，$A'C=AC=1$，即 $A'A=A'B=A'C=1$.

故四面体 $A'ABC$ 为正四面体，$A'C\perp AB$，即异面直线 $A'C$ 与 AB 所成的角为 90°.

解法 2 以 A 为原点，AC、AP 所在直线分别为 y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系如图 6-14 所示，则 $A(0,0,0)$，$B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$，$P\left(0,0,\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$，$C(0,1,0)$.



易知 $A'A$ 与平面 PBC 的交点坐标为 $O\left(\frac{\sqrt{3}}{12},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$，由中点坐标公式，得 $A'\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

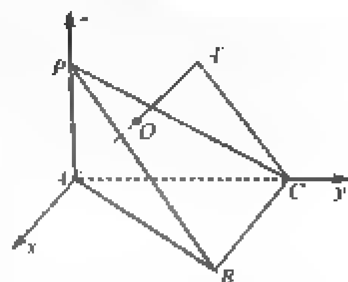


图 6-14

于是，$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{A'C}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

从而 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{A'C}|}=0$.

故直线 AB 与 $A'C$ 所成的角为 90°.

评注 解法1的关键是判断四面体 $A'ABC$ 为正四面体，这其中既有论证，又有计算. 解法2依照固定的思维模式，但关键是确定 A' 点的坐标，这其中也包含了大量的计算. 因此，这是一道兼顾论证和运算的好题.

思考题2 如图6-15，$ABCD$ 是直角梯形，$\angle ABC=\angle BAD=90^\circ$，$SA\perp$ 平面 $ABCD$，$SA=AB=BC=1$，$AD=\frac{1}{2}$.

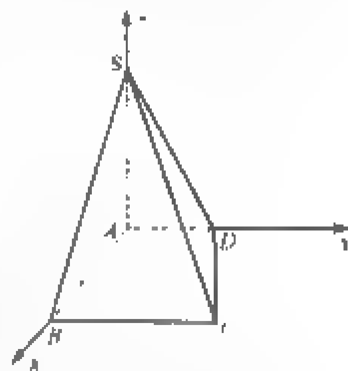


图 6-15

(1) 求 SC 与平面 $ABCD$ 所成的角；

(2) 求点 A 到平面 SCD 的距离；

(3) 求平面 SAB 与平面 SCD 所成锐二面角的大小.

解 (1) 以 A 为原点，以向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AS}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系如图6-15所示，则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，$D\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，$S(0,0,1)$.

因为 $\overrightarrow{CS}=(-1,-1,1)$，$\overrightarrow{AS}=(0,0,1)$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量，所以 SC 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\arcsin\frac{|\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{AS}|}{|\overrightarrow{CS}|\cdot|\overrightarrow{AS}|}=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 设平面 SCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,\lambda,\mu)$，则由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{CD}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{SD}$，得 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SD}=0$，即

$$\begin{cases}-1-\frac{1}{2}\lambda=0,\\ \frac{1}{2}\lambda-\mu=0\end{cases}\quad\text{解得}\quad\begin{cases}\lambda=-2,\\ \mu=-1.\end{cases}$$

从而 $\boldsymbol{n}=(1,-2,-1)$.

故点 A 到平面 SCD 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot n|}{|n|}=\frac{\left|\left(0,\frac{1}{2},1\right)\cdot(1,-2,-1)\right|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

(3) 平面 SAB 与平面 SCD 所成的锐二面角的大小等于这两个平面相应的法向量 $\overrightarrow{AD}=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$ 与法向量 $n=(1,-2,-1)$ 所成的角 θ，则

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot n|}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|n|}=\frac{1}{\frac{1}{2}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

故平面 SAB 与平面 SCD 所成的锐二面角为 $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

评注 从上面的解题过程可以看出，用向量求直线与平面、平面与平面所成的角以及点到平面的距离，要比几何方法简捷明快.

同步检测6

一、选择题

1. 正四面体 $ABCD$ 中，E、F 分别是棱 AB、CD 上的点，且 $AE=\frac{1}{4}AB$，$CF=\frac{1}{4}CD$，则直线 DE 和 BF 所成的角是…………………………（ ）

A. $\arccos\frac{4}{13}$　　B. $\arccos\frac{3}{13}$　　C. $\pi-\arccos\frac{4}{13}$　　D. $\pi-\arccos\frac{3}{13}$

2. （2005年天津市高中数学竞赛试题）如图6-16，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是 AB、AA_1 的中点，则平面 CEB_1 与平面 D_1FB_1 所成二面角的平面角的正弦值是……（ ）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

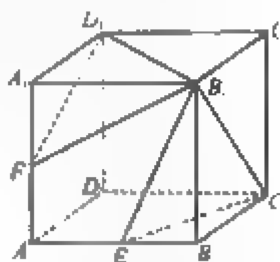


图6-16

3. 如果直角三角形的斜边在平面 α 内，两条直角边所在直线与平面 α 所成的角分别为 θ_1 和 θ_2，那么 θ_1、θ_2 满足的条件是………………（ ）

A. $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2\geqslant 1$　　B. $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2\leqslant 1$

C. $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2>1$　　D. $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2<1$

4. （2006年江苏省高中数学竞赛试题）过空间一定点 P 的直线中，与长方体 $ABCD$



$A_1B_1C_1D_1$ 的12条棱所在直线成等角的直线共有…………………………（ ）

A. 0条　　B. 1条　　C. 4条　　D. 无数多条

5.（2006年陕西省高中数学竞赛试题）如图6-17，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P为棱AB上一点，过点P在空间作直线l，使l与平面$ABCD$和平面ABC_1D_1均成30°角，则这样的直线l的条数为……………………………（ ）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

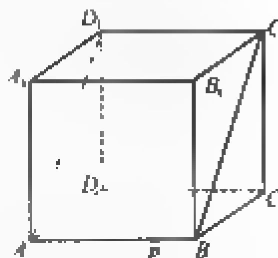


图6-17

6.（2004年天津市高中数学竞赛试题）正四棱锥$S-ABCD$中，侧棱与底面所成的角为α，侧面与底面所成的角为β，侧面等腰三角形的底角为γ，相邻两侧面所成的二面角为θ，则$\alpha,\beta,\gamma,\theta$之间的大小关系是……………………………………………………（ ）

A. $\alpha<\beta<\gamma<\theta$　　B. $\alpha<\beta<\theta<\gamma$

C. $\theta<\alpha<\gamma<\beta$　　D. $\alpha<\gamma<\beta<\theta$

7. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为a，E、F分别是棱AB、BC上的点，且$AE=BF$，若A_1E与C_1F所成的角最小，则有……………………………（ ）

A. $AE=BF=\frac{1}{4}a$　B. $AE=BF=\frac{1}{3}a$　C. $AE=BF=\frac{2}{5}a$　D. $AE=BF=\frac{1}{2}a$

8. 在$Rt\triangle ABC$中，$AC=2$，$BC=3$，P为斜边AB上的一点，现沿CP将此直角三角形折成直二面角$A-CP-B$，当$AB=\sqrt{7}$时，二面角$P-AC-B$的大小是……（ ）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\arctan\sqrt{2}$　　D. $\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

9. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M为棱AA_1的中点，则二面角$B-MC-A$的平面角θ（锐角）的大小是________．

10.（2003年山东省高中数学竞赛试题）在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，侧面A_1ADD_1是正方形，M是CD的中点，AM与CD_1所成的角为θ，若$\sin\theta=\frac{\sqrt{78}}{9}$，则$\frac{AA_1}{AB}$的值为________．

11. 在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$A_1B\perp B_1C$，则直线A_1B与平面B_1C_1CB所成的角为________．

12. 正方形$ABCD$中，M为AD的中点，N为AB的中点，沿CM、CN分别将$\triangle CDM$和$\triangle CBN$折起，使CB与CD重合，设B点与D点重合于P点，DM的中点折起后变成PM



的中点 T，则异面直线 CT 与 PN 所成的角为____。

13.（2004 年吉林省高中数学竞赛试题）已知 Rt△ABC 斜边 AB 上的高为 CD，沿 CD 将△ACD 折起，折成一个直二面角 A－CD－B，此时 ∠ACB 的余弦值为 $\frac{1}{4}$，则 ∠ACD＝____。

14. 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都相等，E 是 A_1B 的中点，F 是棱 CC_1 上一点，当 $AF+BF$ 最小时，异面直线 AE 与 A_1F 所成的角为____。

15. 在单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 AA_1 上一点，且 $AE=\frac{3-\sqrt{6}}{3}$，过 C_1、D_1、E 三点作平面 α，则 α 与面 CDD_1C_1 所成锐二面角的度数为____。

16. 在四面体 S－ABC 的 6 条棱中，有 4 条棱长为 $\sqrt{2}$，另外两条棱长分别为 $\sqrt{3}$ 和 2，则较长的两条棱所成的角为____。

三、解答题

17. 在正四面体 ABCD 中，M、N 分别是棱 AD 的中点和面△BCD 的中心，P、Q 分别是棱 CD 的中点和面△ABC 的中心，求异面直线 MN 和 PQ 所成角的大小。

18.（2005 年河南省高中数学竞赛试题）如图 6-18，P 为正方形 ABCD 外一点，且 PA⊥平面 ABCD，PA＝AD＝2，点 M、N 分别在棱 PD、PC 上，PC⊥平面 AMN。

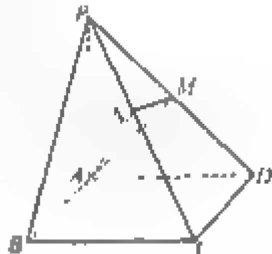


图 6-18

(1) 求证：AM⊥PD；

(2) 求二面角 P－AM－N 的大小；

(3) 求直线 CD 和平面 AMN 所成角的大小。

19. 四面体 A－BCD 满足下列两个条件：

①∠DAB＋∠BAC＋∠CAD＝90°；

②∠ADB＝∠BDC＝∠CDA＝90°。

若 cos70°＝0.3420，求证：二面角 A－BC－D 大于 70°。

20.（2005 年湖南省高中数学竞赛试题）已知四面体 ABCD 中，AB⊥BC，BC⊥CD，CD⊥AB。

(1) 指出与面 BCD 垂直的侧面，并加以证明；

(2) 若 AB＝BC＝1，设 CD＝x，二面角 C－AD－B 的平面角为 α，有 sinα＝f(x)，求函数 f(x) 的表达式和角 α 的取值范围。



第7讲 四面体

知识点金

1.一般四面体

四面体是最简单的多面体,它具有很多类似于三角形的性质:

(1)任何一个四面体都有外接球和内切球.设四面体 $ABCD$ 的外接球半径为 R,内切球半径为 r,则 $R\geqslant 3r$.

(2)设四面体 $ABCD$ 的全面积为 $S_{全}$,内切球半径为 r,则它的体积为 $V=\frac{1}{3}S_{全}\cdot r$.

(3)设四面体 $ABCD$ 四个面 BCD、CDA、DAB、ABC 上的高分别为 h_A、h_B、h_C、h_D,则它的体积为 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot h_A=\frac{1}{3}S_{\triangle CDA}\cdot h_B=\frac{1}{3}S_{\triangle DAB}\cdot h_C=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h_D$,这种等积变换为应用体积法求点到平面的距离提供了依据.

(4)设四面体 $ABCD$ 各面上的高分别为 h_1、h_2、h_3、h_4,内切球半径为 r,则$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$.

(5)在四面体 $ABCD$ 中,若二面角 $A-BC-D$ 的平分面交对棱 AD 于 M,则$\frac{MA}{MD}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BCD}}$.

2.特殊四面体

(1)正四面体

①四个面都是全等的正三角形的四面体叫做正四面体.对于一个四面体,如果两组

对棱都垂直且相等，则该四面体为正四面体；对棱中点连线都垂直且相等的四面体是正四面体．一个四面体为正四面体的充要条件是六个二面角相等．

② 设正四面体的棱长为 a，高为 h，外接球半径为 R，内切球半径为 r，体积为 V，则 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，$R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$，$r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$，$V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$，且 $R+r=h$，$R:r=3:1$．

③ 正四面体相邻两面的二面角为 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$．

④ 正四面体各棱的中点是一个正八面体的 6 个顶点．

⑤ 正四面体对棱间的距离是棱长的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍．

(2) 直角四面体

在四面体 $ABCD$ 中，如果 $\angle BAC=\angle CAD=\angle DAB=90^\circ$，那么这个四面体叫做直角四面体．

(3) 等腰四面体

在四面体 $ABCD$ 中，如果 $AB=CD$，$AC=BD$，$AD=BC$，那么这个四面体叫做等腰四面体．

例题精析

例 1　下列各组数中，有一组数不可能是某一四面体的四条高，这组数是…（　）

A. 1，$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　　B. 4，$\frac{25\sqrt{3}}{3}$，$\frac{25\sqrt{3}}{3}$，$\frac{25\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{5}$，$\frac{\sqrt{30}}{2}$，$\frac{\sqrt{30}}{2}$，$\frac{\sqrt{30}}{2}$　　　D. 2，$\frac{6\sqrt{5}}{5}$，$\frac{6\sqrt{5}}{5}$，$\frac{6\sqrt{5}}{5}$

分析　注意到四面体中任何三个面的面积之和都大于第四个面的面积，可从四面体体积的不变性入手，建立各个面的面积与其对应的高的关系，从中筛选出不符合要求的那一组数．

解　设四面体体积为 V，四个面的面积分别为 S_1、S_2、S_3、S_4，对应的高依次为 h_1、h_2、h_3、h_4，则有

$$V=\frac{1}{3}S_1h_1=\frac{1}{3}S_2h_2=\frac{1}{3}S_3h_3=\frac{1}{3}S_4h_4，$$

即 $S_1:S_2:S_3:S_4=\frac{1}{h_1}:\frac{1}{h_2}:\frac{1}{h_3}:\frac{1}{h_4}$．



对于选项B，有$\frac{1}{h_1}:\frac{1}{h}:\frac{1}{h}:\frac{1}{h_4}=\frac{1}{4}:\frac{\sqrt{3}}{25}:\frac{\sqrt{3}}{25}:\frac{\sqrt{3}}{25}$.

而$\frac{1}{4}=\frac{6}{24}>\frac{6}{25}>\frac{3\sqrt{3}}{25}$，所以，若B中的这组数可为四面体的四条高，则它的一个面的面积必大于其余三个面面积之和，这是不可能的，因此，B中的四个数不可能是某一四面体的四条高.

评注 "三角形的任意两边之和大于第三边"在空间可推广为"四面体的任意三个面的面积之和大于第四个面的面积".本题正是应用了这个性质.

例2 （2004年福建省高中数学竞赛试题）四面体$ABCD$中，$AB=CD=a$，$BC=AD=b$，$CA=BD=c$.如果异面直线AB与CD所成的角为θ，那么$\cos\theta=$______.

分析 由于四面体的三组对棱分别相等，所以可构造一个长方体，使该四面体各棱为这个长方体的面对角线，从而可作出异面直线AB与CD所成的角，然后再进行计算.当然，也可以考虑利用向量法求AB与CD所成角的余弦.

解法1 将四面体$ABCD$放入长方体中.因为$A'B'\parallel AB$，所以$\angle B'OD$（或其补角）为异面直线AB与CD所成的角，即$\angle B'OD=\theta$.设长方体的长、宽、高分别为x、y、z，则有

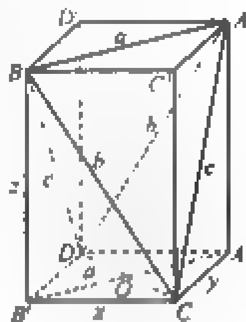


图7-1

$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\x^2+z^2=b^2,\\y^2+z^2=c^2.\end{cases}$$

解得$x^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$.

$$\begin{aligned}\text{从而}\cos\angle B'OD&=\cos(\angle B'CD+\angle OB'C)\\&=\cos 2\angle B'CD=2\cos^2\angle B'CD-1\\&=2\left(\frac{x}{a}\right)^2-1=\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2}-1\\&=\frac{b^2-c^2}{a^2}.\end{aligned}$$

故$\cos\theta=\frac{|b^2-c^2|}{a^2}$.

解法2 记$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{p}$，$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{q}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{r}$，则由$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}$，得$b=|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}|$，即$b^2=\boldsymbol{q}^2+\boldsymbol{r}^2-2\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}$.

因为$\boldsymbol{q}^2=c^2$，$\boldsymbol{r}^2=a^2$，所以$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2}$.

同理，$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$.

故 $\cos\theta=\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\rangle=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{DC}|}=\frac{|(q-p)\cdot r|}{|q-p|\cdot|r|}=\frac{|q\cdot r-p\cdot r|}{|q-p|\cdot|r|}$

$=\frac{|b^2-c^2|}{a^2}$.

评注 这是一个有关等腰四面体的问题，一般都可以通过构造长方体来解决．利用向量法求两条异面直线所成的角，可以回避作这两条异面直线所成的角的问题，是一种整体解决问题的策略．

例 3 设 P 为四面体 $ABCD$ 内的一点，AP、BP、CP、DP 的延长线分别交对面于点 A'、B'、C'、D'，求证：

(1) $\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}+\frac{PD'}{DD'}=1$；

(2) $\frac{AP}{AA'}+\frac{BP}{BB'}+\frac{CP}{CC'}+\frac{DP}{DD'}=3$.

分析 平面几何中有如下类似的题目：

设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，AP、BP、CP 的延长线分别交对边 BC、CA、AB 于点 A'、B'、C'，则有

(1) $\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}=1$；

(2) $\frac{AP}{AA'}+\frac{BP}{BB'}+\frac{CP}{CC'}=2$.

这个命题的证明用到了面积法．类似地，本题可考虑用体积法来证明．

证明 (1) 如图 7-2，过点 A 作 $AH\perp$ 平面 BCD，垂足为 H，则平面 $AA'H\perp$ 平面 BCD．在面 $AA'H$ 内，过点 P 作 $PH'\perp A'H$，垂足为 H'，则 $PH'\perp$ 平面 BCD．于是，有 $\frac{PA'}{AA'}=\frac{PH'}{AH}$．

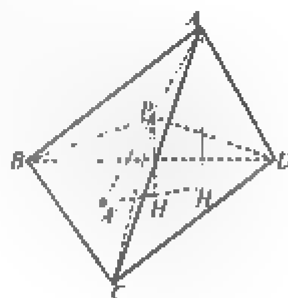


图 7-2

从而 $\frac{V_{P-BCD}}{V_{A-BCD}}=\frac{\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot PH'}{\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AH}=\frac{PH'}{AH}$．

因此，$\frac{PA'}{AA'}=\frac{V_{P-BCD}}{V_{A-BCD}}$．

同理可证 $\frac{PB'}{BB'}=\frac{V_{P-CDA}}{V_{B-CDA}}$，$\frac{PC'}{CC'}=\frac{V_{P-DAB}}{V_{C-DAB}}$，$\frac{PD'}{DD'}=\frac{V_{P-ABC}}{V_{D-ABC}}$．

因为 $V_{P-BCD}+V_{P-CDA}+V_{P-DAB}+V_{P-ABC}=V_{A-BCD}$，所以 $\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}+\frac{PD'}{DD'}=$

1



(2) 因为$\frac{AP}{AA'}=1-\frac{PA'}{AA'}$,$\frac{BP}{BB'}=1-\frac{PB'}{BB'}$,$\frac{CP}{CC'}=1-\frac{PC'}{CC'}$,$\frac{DP}{DD'}=1-\frac{PD'}{DD'}$,

代入(1)的结论,得

$$\frac{AP}{AA'}+\frac{BP}{BB'}+\frac{CP}{CC'}+\frac{DP}{DD'}=3.$$

评注 由于四面体是三角形在空间的直接推广,因此三角形的很多性质都可以推广到四面体上.

例4 在直角四面体 $V-ABC(\angle AVB=\angle BVC=\angle CVA=90^\circ)$ 中,记$\triangle VAB$、$\triangle VBC$、$\triangle VCA$、$\triangle ABC$的面积分别为S_1、S_2、S_3、S,求证 $S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$.

分析 可设法将S_1、S_2、S_3用S表示.

证明 如图7-3,过点V作$VO\perp$平面ABC,易知垂足O在$\triangle ABC$的内部,连接CO延长交AB于D,则$AB\perp VO$.

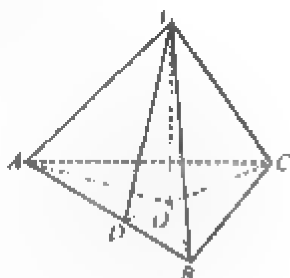


图7-3

因为$\angle BVC=\angle AVC=90^\circ$,所以$VC\perp$平面$VAB$,从而$VC\perp AB$.

于是,$AB\perp$平面VCD,则$AB\perp VD$.

所以$S_1^2=S_{\triangle VAB}^2=\frac{1}{4}AB^2\cdot VD^2$.

在$Rt\triangle CVD$中,由射影定理,得$VD^2=CD\cdot OD$.

因此,$S_1^2=\frac{1}{4}AB^2\cdot CD\cdot OD=\left(\frac{1}{2}AB\cdot CD\right)\left(\frac{1}{2}AB\cdot OD\right)$.

又因为$AB\perp$平面VCD,所以$AB\perp CD$.

故$S_1^2=S\cdot S_{\triangle OAB}$.

同理可证$S_2^2=S\cdot S_{\triangle OBC}$,$S_3^2=S\cdot S_{\triangle OCA}$.

故$S_1^2+S_2^2+S_3^2=S(S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCA})=S^2$.

评注 虽然四面体三个侧面$\triangle VAB$、$\triangle VBC$、$\triangle VCA$都是直角三角形,但是我们在计算它们的面积时,并没有用两直角边之积的一半去求,而是通过作垂直截面VCD,同时找出了侧面$\triangle VAB$和底面$\triangle ABC$的高VD、CD,将面积用线段的乘积表示,再将线段的乘积分析成面积的乘积. 本题几何味较浓,技巧性也比较强.

例5 (1) 证明:如果一个四面体的6个二面角(相邻两个面所成角)都相等,那么这个四面体一定是正四面体.

(2) 如果一个四面体的5个二面角相等,这个四面体是正四面体吗?

分析 可先作出二面角的平面角,由它们相等证明每个面的三个内角都相等,从而说明四面体的每个面都是正三角形. 对于第(2)小题,可构造一个有5个二面角相等的四面体,但不是正四面体.



解 (1) 设四面体 $ABCD$ 的 6 个二面角都相等，易知各二面角的度数都小于 90°，因此四面体 $ABCD$ 的每个顶点在对面上的射影应在对面的三角形内部.

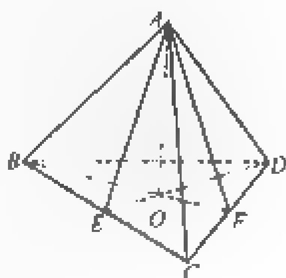


图 7-4

如图 7-4，作 $AO\perp$ 平面 BCD，垂足为 O，再分别作 $OE\perp BC$，$OF\perp CD$，垂足分别为 E、F，连接 AE、AF. 由三垂线定理知，$AE\perp BC$，$AF\perp CD$，则 $\angle AEO$、$\angle AFO$ 分别是二面角 $A-BC-D$、$A-CD-B$ 的平面角. 由题设知，$\angle AEO=\angle AFO$，所以 $\triangle AOE\cong\triangle AOF$，故 $AE=AF$.

又因为 $\angle AEC=\angle AFC=90^\circ$，$AC$ 公用，所以 $\triangle AEC\cong\triangle AFC$，故 $\angle ACB=\angle ACD$.

再由 B 点在 $\triangle CDA$ 内的射影，用类似方法可证 $\angle BCD=\angle ACB$. 所以 $\angle ACB=\angle ACD=\angle BCD$.

同理可证，四面体其余三个顶点处的三个面角也都分别相等.

将顶点 A、B、C、D 处相等的面角分别记为 α、β、γ、δ，则由 $\alpha+\beta+\gamma=\beta+\gamma+\delta=\gamma+\delta+\alpha=\delta+\alpha+\beta=180^\circ$，得 $\alpha=\beta=\gamma=\delta$. 从而 $\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle ADB$、$\triangle BCD$ 都是正三角形.

故四面体 $ABCD$ 是正四面体.

(2) 如果一个四面体有 5 个二面角相等，它不一定是正四面体. 例如，在四面体 $ABCD$ 中，使

$\angle ABC=\angle CBD=\angle DBA=\angle ACB=\angle BCD=\angle DCA=40^\circ$，

$\angle BAD=\angle CAD=\angle CDA=\angle BDA=70^\circ$，

$\angle BAC=\angle BDC=100^\circ$.

这样的四面体显然存在，且除二面角 $B-AD-C$ 外，其他 5 个二面角都相等，但它不是正四面体.

评注 本题说明，三角形中的性质推广到四面体中不一定都成立. 更引人注目的是，与三角形高线的性质相对应的四面体的 4 条高线也不一定交于一点.

例 6 求证：正四面体各棱在任一平面上的射影的平方和为定值.

分析 我们先通过特殊情形来探求这个定值. 设正四面体 $ABCD$ 的棱长为 a，若平面 M 经过 $\triangle BCD$，过点 A 作 $AO\perp$ 平面 M，垂足为 O，则 OB、OC、OD 分别是棱 AB、AC、AD 在面 M 上的射影，且 $OB=OC=OD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，$BC$、$CD$、$DB$ 的射影是它们本身. 故 6 条棱在平面 M 上的射影的平方和为 $3\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2+3a^2=4a^2$. 可见，这个定值为 $4a^2$. 对于任意一个平面 M，要证明这个结论，注意到正方体中存在正四面体，我们可通过构造正方体设法证明这个结论.



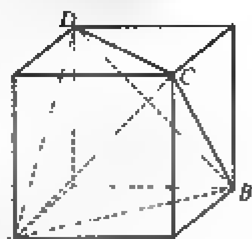


图7-5

证明 设正四面体 $ABCD$ 的棱长为 a。如图7-5，过四面体 $ABCD$ 的每条棱分别作对棱的平行平面，这6个平面构成一个正方体，其棱长为 $b=\frac{a}{\sqrt{2}}$。

设正方体自 A 点引出的三条棱与平面 M 的垂线所成的角分别为 α、β、γ，则由熟知的结论，有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$。故正方体12条棱在平面 M 上的射影的平方和为 $4b^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)=8b^2$，它是一个定值。

又正方体每个面在平面 M 上的射影均为平行四边形，而每个面的对角线（正四面体的棱）在平面 M 上的射影恰好是相应平行四边形的对角线，且每个面的对角的射影的平方和等于四条边射影的平方和，所以从正方体每一个面各取一条对角线，它们的射影的平方和等于各棱射影的平方和，即 $8b^2$。

故正四面体 $ABCD$ 各棱在任一平面 M 上的射影的平方和为 $8b^2=8\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=4a^2$。

评注 从特殊情形入手，这是一种常用的解题思路。此外，对于正四面体，我们也常常通过构造正方体，将其进行转化。

例7 设 $ABCD$ 是正四面体，M、N 分别是平面 ABC、ACD 上的点，证明线段 MN、BN、DM 是一个三角形的三条边。

分析 若取 AC 的中点 E，则由正四面体的性质知，$AC\perp$ 面 BDE，从而面 $ABC\perp$ 面 BDE，面 $ACD\perp$ 面 BDE，故点 M、N 在面 BDE 上的射影分别在 BE、CE 上，不妨设射影为 M'、N'。若 M' 与 N' 重合（重合于 E 点），则 M、N 均在 AC 上，故 $DM=BM$，$\triangle BMN$ 即为所求。若 M' 与 N' 不重合，可在平面 BDE 上取点 P，使 $PM'=DM'$，$PN'=BN'$。由于 $MN'\perp$ 面 BDE，$NN'\perp$ 面 BDE，因此可以证得 $PM=DM$，$PN=BN$（可作为引理先证明）。由此，不难推出 $\triangle PMN$ 为所求三角形。

证明 先证明下面的引理。

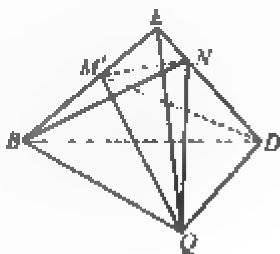


图7-6

引理 设 $\triangle BDE$ 为等腰三角形，且边 $BD=a$，$BE=DE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$M'$、$N'$ 分别是边 BE、DE 上不同两点，则 $M'N'$、BN'、DM' 是一个三角形的三条边。

引理证明 如图7-6，考察以 E 为顶点的正三棱锥 $E-BDQ$。这个正三棱关于通过 QD 的中点和棱 EB 的平面 π 对称，因为 $QD\perp$ 平面 π，所以 $QM'=DM'$。

同理可证，$QN'=BN'$。

故 $\triangle QM'N'$ 为所求三角形.引理得证.

再证明本题的结论.

如图7-7,设 AC 中点为 E,则 $BE\perp AC$,$DE\perp AC$,所以 $AC\perp$ 平面 BDE,从而平面 $ABC\perp$ 平面 BDE,平面 $ACD\perp$ 平面 BDE.故点 M、N 在平面 BDE 上的射影 M'、N' 分别在 BE、DE 上.

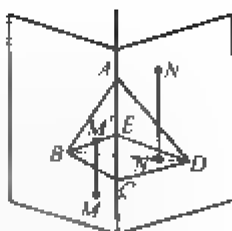


图7-7

如果 $M'=N'$,则点 M、N 均在 AC 上,且 $BM=DM$,故 $\triangle BMN$ 为所求三角形.

如果 $M'\neq N'$,由引理知,可以在平面 BDE 上选择一点 P,使得 $PM'=DM'$、$PN'=BN'$.但 $MM'\perp$ 平面 BDE、$NN'\perp$ 平面 BDE,所以 $PM=\sqrt{PM'^2+MM'^2}=\sqrt{DM'^2+MM'^2}=DM$.同理,$PN=BN$.故 $\triangle PMN$ 为所求三角形.

综上所述,线段 MN、BN、DM 是一个三角形的三条边.

评注 本题的关键是作出正四面体 $ABCD$ 的截面 BDE,使得平面 ABC 和平面 ACD 都垂直于平面 BDE.这样,点 M、N 在平面 BDE 上的射影分别在 BE、DE 上,问题的讨论便都集中在平面 BDE 上.

例8 (第1届IMO试题)求证:存在具有如下性质的四面体的充要条件,即对于每一个 k 值,$k=1,2,3,4,5$,四面体中有 k 条棱其长度为 a,其余 $6-k$ 条棱其长度为1.

分析 本题的实质是求正数 a 的取值范围,使得有 k 条棱的长度为 a,其余 $6-k$ 条棱的长度均为1.根据对称性,关键是求当 $k=1,2,3$ 时,a 的取值范围.

证明 (1)$k=1$.

设 $ABCD$ 是具有题述性质的四面体.不失一般性,设 $AB=a$,$AC=BC=AD=BD=CD=1$,M 为棱 AB 的中点,则有 $CM=DM=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$.

在 $\triangle MCD$ 中,由 $CM+DM>CD$,得

$$2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}>1.$$

解得,必要条件为 $0<a<\sqrt{3}$.

反之,若 $0<a<\sqrt{3}$,则还有

$$CM+CD=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}+1>\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}=DM,$$

$$DM+CD=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}+1>\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}=CM.$$

即存在一个 $\triangle MCD$ 具有上面给出的边长.由此推出在由 A、B、C 确定的平面之外有



一点 D，使得 $AD = BD = CD = 1$.

故 $0 < a < \sqrt{3}$ 也是存在四面体的充分条件.

(2) $k = 2$.

i. 设 $AC = BC = a$，C 是这两条棱的公共顶点，则因 $AB = 1$，由 $AC + BC > AB$，得 $2a > 1$，即 $a > \frac{1}{2}$. 今仍设 M 是 AB 的中点，由 $CD + DM > CM$，得

$1 + \frac{\sqrt{3}}{2} > \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}$，解得 $0 < a < \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

另一方面，由 $DM + CM > CD$，得

$\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} > 1$，解得 $a > \sqrt{2-\sqrt{3}}$

由此，得到必要条件为 $\sqrt{2-\sqrt{3}} < a < \sqrt{2+\sqrt{3}}$

反之，若 $\sqrt{2-\sqrt{3}} < a < \sqrt{2+\sqrt{3}}$，则 $\triangle MCD$ 存在，于是四面体 $ABCD$ 也存在. 因此，这一条件也是充分的.

ii. 设 $AB = CD = a$，这两条棱没有公共点. 由 $MC = MD = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$ 及 $\triangle MCD$ 中的不等关系，得

$2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} > a$，解得 $0 < a < \sqrt{2}$.

因为具有上述条件的四面体总能够作出，所以这一条件也是充分的.

综合 i，ii 知，当 $k = 2$ 时，存在具有题述性质的四面体的充要条件是 $0 < a < \sqrt{2+\sqrt{3}}$

(3) $k = 3$.

i. 设 $a > \frac{\sqrt{3}}{3}$，则存在一个四面体 $ABCD$，使得 $AB = BC = CA = 1$ 和 $DA = DB = DC = a$. 若 O 为正 $\triangle ABC$ 的中心，则由 $a > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 知，总可以作出 $\triangle ABC$ 所在平面的垂线 DO，且 $DO = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$

ii. 设 $a < \sqrt{3}$，则存在一个四面体 $ABCD$，使得 $AB = BC = CA = a$ 和 $DA = DB = DC = 1$. 类似于 i，总可以选择一点 D，使 $DO = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)}$，其中 O 为正 $\triangle ABC$ 的中心



因为Ⅰ与Ⅱ所确定的区间是相互交错的，故证明了当 $k=3$ 时，对于 $a\neq\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}$ 的所有正实数，都存在具有题述性质的四面体.

(4) $k=4$.

这一情形可归纳为 $k=2$ 的情形，只要把棱为 a 和棱长 1 交换一下即可，我们得到充要条件 $0<\frac{1}{a}<\sqrt{2+\sqrt{3}}$，即 $a>\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

(5) $k=5$.

这一情形可由 $k=1$ 推出，只要把棱长 a 和棱长 1 交换一下即可，得充要条件为 $a>\frac{\sqrt{3}}{3}$.

综合以上 5 种情形得到，存在具有题述性质的四面体的充要条件如下.

k		2	3	4	5
a	$0<a<\sqrt{3}$	$0<a<\sqrt{2+\sqrt{3}}$	$a>0$ 且 $a\neq\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}$	$a>\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$a>\frac{\sqrt{3}}{3}$

评注 本题给出了构造两种不同棱长 1 和 a 的四面体的充要条件.目前，许多竞赛题都是由此题改编的.

思考交流

思考题 1 （第 8 届 IMO 试题）证明：一个正四面体的外接球球心到四个顶点的距离的和，小于空间中其他任意一点到这四个顶点的距离的和.

分析 平面几何中有类似的问题：一个正三角形的中心到三个顶点的距离的和，小于该三角形所在平面上其他任意一点到这三个顶点的距离的和.我们可仿此题给出一个证明.

证明 先证明两个引理：

引理 1 设 P 是正四面体 $ABCD$ 内部任一点，则点 P 到四个面的距离的和等于这个正四面体的高 h.

引理 2 设 P 是正四面体 $ABCD$ 外部任一点，则点 P 到四个面的距离的和大于这个正四面体的高 h.

当点 P 在四面体 $ABCD$ 内部时，由 $V_{P-ABC}+V_{P-ABD}+V_{P-ACD}+V_{P-BCD}=V_{A-BCD}$ 可知



引理1成立；当点P在四面体$ABCD$外部时，由$V_{P-ABC}+V_{P-BCD}+V_{P-CDA}+V_{P-DAB}>V_{A-BCD}$可知引理2成立.

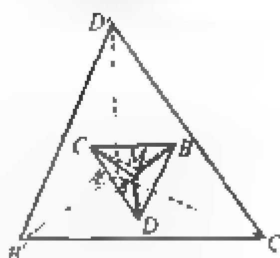


图7-8

现在来证明本题的结论.

如图7-8，设$ABCD$是给定的正四面体，我们对它外接一个四面体$A'B'C'D'$，使得$ABCD$与$A'B'C'D'$的彼此对应的面互相平行，且点A、B、C、D位于$A'B'C'D'$的界面上，则这两个四面体是相似的，从而$A'B'C'D'$也是正四面体.

由于正四面体$ABCD$的四条高线交于一点，记它为M，则M与外接球球心重合，且线段MA、MB、MC及MD恰好是自M到正四面体$A'B'C'D'$各面的垂线.根据引理1，它们的长度之和等于正四面体$A'B'C'D'$的高h'，即

$MA+MB+MC+MD=h'$.

现在，我们考虑在正四面体$A'B'C'D'$的内部或其面上的任意一点P(异于点M)，对于此点，线段PA、PB、PC、PD中至少有一条比自点P到正四面体$A'B'C'D'$的对应面的垂线要长，因此

$PA+PB+PC+PD>MA+MB+MC+MD$.

此外，根据引理2，对于所有位于正四面体$A'B'C'D'$外部的点P，上述不等式显然也成立.

评注　本题给出了正四面体的一个极小值点，即空间任意一点到正四面体各顶点距离之和，以这个正四面体外接球球心到各顶点距离之和为最小.

思考题2　三角形的面积由三条边长唯一确定，问，四面体的体积是否由四个面的面积唯一确定？并说明理由.

解　我们首先构造一个符合条件的四面体.

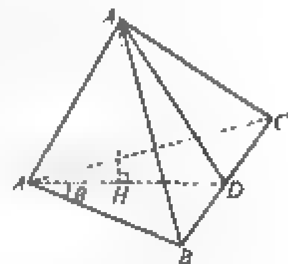


图7-9

设$\triangle ABC$为等腰三角形，$AB=AC$，以BC为轴将$\triangle ABC$旋转，其顶点A转到A'的位置(如图7-9)，并使$A'A=BC$，此时四面体$A'ABC$的四个面为全等三角形.令$\triangle ABC$的面积为S，则四面体$A'BCD$的全面积为$4S$.

下面我们再来求四面体$A'ABC$的体积V.

设D为BC边的中点，连接AD、$A'D$，则

$AD\perp BC$，$A'D\perp BC$.

因为$\angle A'AB=\angle A'AC$，所以作$A'H\perp$平面ABC，则垂足H在AD上.设$\angle BAC=2\theta$，$AD=A'D=h'$，$A'H=h$，则$BD=h'\tan\theta$，$S=h'^2\tan\theta$，$A'A=BC=2h'\tan\theta$，$h=2h'\tan\theta\sqrt{1-\tan^2\theta}$.从而

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{2}{3}Sh'\tan\theta\sqrt{1-\tan^2\theta}=\frac{2}{3}S^{\frac{3}{2}}\sqrt{\tan^2\theta(1-\tan^2\theta)}.$$

可见，V 与 θ 有关，当 S 一定而 θ 变化时，V 也变化.

故四面体的体积并非由四个面的面积唯一确定.

评注 本题再次说明在立体几何与平面几何中相对应的命题不一定都成立

同步检测 7

一、选择题

1. 若 $\triangle ABC$ 沿三条中位线折起能拼成一个四面体，则 $\triangle ABC$ 的形状为 ……（ ）

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 以上三种情况都有可能

2. 在四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp$ 面 BCD，且 $AB=BC=CD=DB$，设二面角 $B-AD-C$ 的度数为 α，则 $\tan\alpha=$ ……（ ）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{7}}{7}$

3. 在四面体 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=7$，$CD=11$，$DA=9$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的值 ……（ ）

A. 只有一个　　B. 有两个　　C. 有四个　　D. 有无穷多个

4.（2005 年福建省高中数学竞赛试题）正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1，E 是 $\triangle ABC$ 内一点，点 E 到边 AB、BC、CA 的距离之和为 x，点 E 到平面 DAB、DBC、DCA 的距离之和为 y，则 x^2+y^2 的值等于 ……（ ）

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\frac{5}{3}$　　D. $\frac{17}{12}$

5.（2004 年山东省高中数学竞赛试题）如图 7-10，在四面体 $PABC$ 中，$PA\perp$ 面 ABC，$\angle ACB=90^\circ$，$AE\perp PB$ 于 E，$AF\perp PF$ 于 F，若 $PA=AB=2$，$\angle BPC=\theta$，则当 $\triangle AEF$ 的面积最大时，$\tan\theta$ 的值为 ……（ ）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

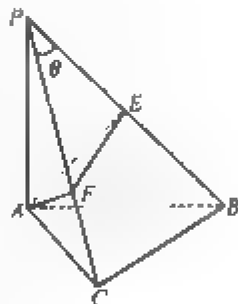


图 7-10

6. 如果四面体的每一个面都不是等腰三角形，那么其长度不相等的棱的条数最少为 ……（ ）



A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

7. 四面体 $ABCD$ 的六条棱长分别为 7,13,18,27,36,41，如果 $AB=41$，则 CD 的长为（　）

A. 7　　B. 13　　C. 18　　D. 27

8. 设四面体四个面的面积分别为 S_1, S_2, S_3, S_4，记 $S=\max\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$，$\lambda=\dfrac{S_1+S_2+S_3+S_4}{S}$，则 λ 一定满足（　）

A. $\dfrac{5}{2}<\lambda\leqslant\dfrac{9}{2}$　　B. $\dfrac{7}{2}<\lambda<\dfrac{11}{2}$

C. $2<\lambda\leqslant 4$　　D. $3<\lambda<4$

二、填空题

9.（2005 年上海市高中数学竞赛试题）如图 7-11，正四面体 $ABCD$ 的棱长为 6cm，在棱 AB、CD 上各有一点 E、F，若 $AE=1$cm，$CF=2$cm，则线段 EF 的长为_____cm.

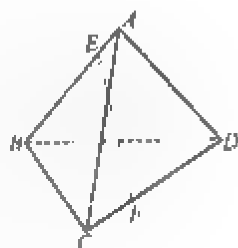


图 7-11

10. 正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1，G 是底面 $\triangle ABC$ 的重心，点 M 在线段 DG 上，且使得 $\angle AMB=90^\circ$，则 $\dfrac{DM}{MG}=$______.

11. 在正四面体 $PABC$ 中，PA、PB、PC 两两垂直，$\angle PBA=45^\circ$，$\angle PBC=60^\circ$，M 为 AB 的中点，则 PC 与平面 ABC 所成角的正切值为______.

12. 在正四面体 $ABCD$ 中，E、F、G 分别是棱 AB、BC、CD 的中点，则二面角 $C-FG-E$ 的大小是______.

13. 若一个四面体由长度为 1,2,3 的三种棱所构成，则这样的四面体的个数是______.

14. 已知四面体 $ABCD$ 的六条棱的长分别为 4,7,20,22,28,x，则 x 可取的最小值的整数为______.

15. 在四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp AC$，$AC\perp AD$，$AD\perp AB$，M 为 $\triangle ABC$ 内一点，若 $\cos\angle BAM=\dfrac{3}{5}$，$\cos\angle CAM=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\angle DAM$ 的值为______.

16. 在四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$BC=DA$，$AC=BD$，E、F 分别为 AB、CD 的中点，且 $EF\perp AB$，$EF\perp CD$，$EF=6$，$AC=10$，$BC=6\sqrt{2}$，则异面直线 AD 与 BC 的距离是______.



三、解答题

17．证明：若一个四面体中有两条高线相交，则另外两条高线也必定相交．

18．能否将任意一个四面体的六条棱分成两组，每组三条，且每组中的三条均可构成一个三角形的三条边？并证明你的结论．

19．求证：如果一个四面体的四个顶点中，每个顶点处的三个面角之和均为180°，那么这个四面体的三组对棱分别相等．

20．在棱长为1的正四面体的表面上选取一个由若干条线段组成的有限集，使得四面体的任二个顶点都可以用由这个集合中一些线段组成的折线来连接．问：能否选取满足上述要求的线段集，使其中所有线段的总长度小于$1+\sqrt{3}$？



第八讲 多面体与球

知识点金

1. 棱柱、棱锥

(1) 棱柱和棱锥是两个基本的多面体，它们的有关概念和性质，高中数学课本作了详尽的介绍，这里不再赘述.

(2) 对于直棱柱、正棱柱、平行六面体、长方体和正方体等一些特殊的棱柱，要重视它们各自的性质以及彼此间的联系.

(3) 要熟悉正棱锥中的四个直角三角形，因为它们包含了棱锥的高、斜高、侧棱、底边长的一半、底面正多边形的外接圆半径、内切圆半径，侧棱与底面所成的角，侧面与底面所成的角等诸多元素. 沟通这些元素间的联系，对于解决有关正棱锥的计算问题是有益的.

(4) 棱柱和棱锥是立体几何中线线、线面、面面关系的重要载体. 特别是棱柱、棱锥中有关直线与平面的平行、垂直关系的判定以及角和距离的计算，一直是高中数学联赛命题的热点.

2. 正多面体

定义 每个面都是有相同边数的正多边形，以每个顶点为端点都有相同棱数的凸多面体，叫做正多面体.

正多面体有正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体及正二十面体等五种. 正四面体和正六面体(正方体)是两种最基本也是最重要的正多面体，其中正四面体我们已经在上一讲作了专题讨论.

3. 欧拉定理

欧拉定理 简单多面体的顶点数 V、棱数 E 及面数 F 间有关系 $V+F-E=2$(其



关系式称之为欧拉公式)

4. 球

(1) 球也是一种基本的几何体. 球与圆的定义、球与圆的性质大都是类似的，所以这里并不需要 罗列 当需要应用时，只需把它和圆类比，就不难理解和掌握了

(2) 球与多面体的结合，犹如平面几何中圆与多边形的结合，具有很多的问题和高难度的技巧 本讲主要讨论球和多面体相切与相接的问题.

(3) 解决多球问题，关键是弄清这些球的放置规律，抓住球心的位置和半径 必要时，可把问题归结到适当的截面上.



例题精析

例1 已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面是以 AB 为斜边的等腰直角三角形，$SA=SB=SC=2$，$AB=2$，设 S、A、B、C 均在以 O 为球心的某个球面上，则点 O 到平面 ABC 的距离为 …………………………………………………………（　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{18}{23}$ $4\sqrt{3}$

分析 显然问题的关键是确定球心 O 的位置，为此我们先来考察三棱锥 $S-ABC$ 的特点.

解 如图8-1，过点 S 作 $SD\perp$ 平面 ABC，垂足为 D，由 $SA=SB=SC=2$ 知，D 为 $\triangle ABC$ 的外心. 因为 $\angle ACB=90^\circ$，所以 D 为 AB 的中点.

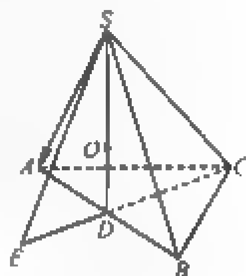


图8-1

因为 $AC=BC$，所以 $CD\perp AB$，从而 $AB\perp$ 平面 SCD，且平面 SCD 平分 AB，由此可知四面体 $S-ABC$ 外接球的球心 O 在面 SCD 内.

在 $\triangle SCD$ 中，由 $SD=\sqrt{3}$，$CD=1$，$SC=2$ 知，$SD\perp CD$.

设直线 CD 与球 O 的另一个交点为 E，则 $\triangle SEC$ 的外接圆是球 O 的一个大圆，O 为 $\triangle SEC$ 的外心. 由 $CE=2CD=2$ (由 $SD\perp CE$ 知，D 为 CE 的中点) 知，$\triangle SEC$ 是边长为2的正三角形，O 为 $\triangle SEC$ 的中心，故 $OD=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即点 O 到平面 ABC 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，应选 A.

评注 由对称性知，三棱锥 $S-ABC$ 实质上是一个正四棱锥的一半，且 $\triangle SAB$ 为过



个正四棱锥的轴截面，所以球心O在$\triangle SAB$所在平面内．又因为$\triangle SAB$是边长为2的正三角形，所以球心O为$\triangle SAB$的中心，故点O到平面ABC的距离为$OD=\frac{1}{3}SD=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

例2　如图8-2，在四棱锥$P-ABCD$中，四个侧面都是腰长为1的等腰直角三角形，其中$\angle APB=\angle APD=\angle PBC=\angle PDC=90^\circ$，则四棱锥$P-ABCD$的高为______．

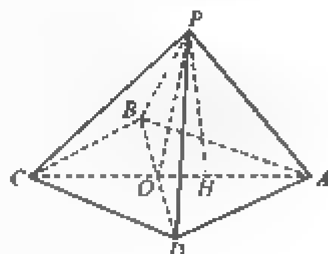


图8-2

分析　作出四棱锥$P-ABCD$的高并不难，关键是要确定高线的垂足的位置．

解　连接AC、BD相交于O点，由$\angle APB=\angle APD=90^\circ$，$\angle CPB=\angle CPD=45^\circ$知，点$A$、$P$、$C$都在$BD$的垂直平分面上．

作$PH\perp$平面$ABCD$，则垂足H必在AC上，所以$OP^2+OB^2=1=OC^2+OB^2$，从而$OP=OC$．

设$OP=OC=x$，$PH=h$，在$\triangle POC$中，由余弦定理，得$\cos\angle POC=\frac{2x^2-PC^2}{2x^2}=1-\frac{1}{x^2}$．

因为$AP\perp PB$，$AP\perp PD$，所以$AP\perp$平面PBD，则$AP\perp PO$，从而$\cos\angle POA=\frac{PO}{OA}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$．

由$\angle POC=\pi-\angle POA$，得$1-\frac{1}{x^2}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$．

化简得$x^4+x^2-1=0$，解得$x^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．

在$\mathrm{Rt}\triangle APO$中，由面积关系，得

$$PH=\frac{PO\cdot PA}{OA}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

评注　本题的关键是首先证明面$PAC\perp$平面$ABCD$，从而可知点P在底面上的射影H在AC上．而在$\triangle PAC$中，仅有$PA=1$，$PC=\sqrt{2}$是不能确定PH的，但注意到$AP\perp PB$，$AP\perp PD$，可知$AP\perp$面PBD，从而$AP\perp PO$．问题转化为在$\mathrm{Rt}\triangle APO$中，求斜边OA上的高．而在$\mathrm{Rt}\triangle APO$中，仅有$PA=1$，所以还需要求PO或OA．这里，我们又利用$\mathrm{Rt}\triangle POB\cong\mathrm{Rt}\triangle COB$，得到$PO=CO$，由$\angle POC=\pi-\angle POA$建立了关于$PO$的方程，这是本题的一个难点．

例3　如图8-3，斜三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面是边长为2的正三角形，顶点A_1在

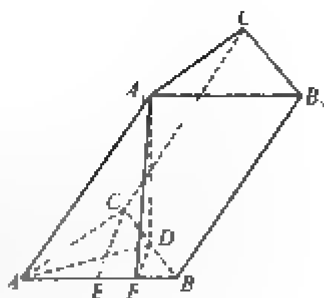


图 8 3

底面 ABC 上的射影 D 恰好是 BC 的中点.

(1) 求证 侧面 BCC_1B_1 是矩形；

(2) 若 $\angle A_1AB = 45^\circ$，求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的全面积.

分析 斜三棱柱的侧面都是平行四边形，要证明侧面 BCC_1B_1 为矩形，只要证明有一个角是直角即可，这需要证明任意一条侧棱与 BC 垂直．由已知条件和(1)的结论，容易求出底面 $\triangle ABC$ 和侧面矩形 BCC_1B_1 的面积，因此求全面积的关键是求另外两个侧面面积．注意到侧面 ABB_1A_1 与 ACC_1A_1 是两个全等的平行四边形，且 $\angle A_1AB = \angle A_1AC = 45^\circ$，这两个侧面面积就容易求了.

解 (1) 因为 $A_1D \perp$ 底面 ABC，所以 AD 是 A_1A 在底面 ABC 上的射影.

又因为 D 是 BC 的中点，所以 $BC \perp AD$，从而 $BC \perp A_1A$（三垂线定理）.

因为 $B_1B \parallel A_1A$，所以 $BC \perp B_1B$.

故侧面 BCC_1B_1 是矩形.

(2) 因为 $A_1D \perp$ 底面 ABC，且 $\angle BAD = \angle CAD$，所以 $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 45^\circ$，故侧面 A_1ABB_1 和 A_1ACC_1 是全等的平行四边形.

取 AB 的中点 E，则 $CE \perp AB$；再取 BE 的中点 F，则 $DF \parallel CE$，从而 $DF \perp AB$.

连接 A_1F，则 $A_1F \perp AB$（三垂线定理）.

在 $Rt\triangle AFA_1$ 中，$AF = \frac{3}{4}AB = \frac{3}{2}$，$\angle A_1AB = 45^\circ$，则 $A_1F = AF = \frac{3}{2}$，$A_1A = \sqrt{2}AF = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

于是，$S_{\square A_1ABB_1} = S_{\square A_1ACC_1} = AB \cdot A_1F = 2 \times \frac{3}{2} = 3$，

$S_{矩形BCC_1B_1} = BC \cdot B_1B = BC \cdot A_1A = 2 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$，

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3}$.

故 $S_全 = 2S_{\square A_1ABB_1} + S_{矩形BCC_1B_1} + 2S_{\triangle ABC} = 6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$.

评注 本题的第(1)小题是一个很重要的结论，应予以重视.

例 4 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA \perp$ 平面 ABC，EF 为 PC 和 AB 的公垂线段，其中点 E 在 PC 上，点 F 在 AB 上．由 C 向 AB 作垂线，垂足为 H，求证 $PE : EC = CH^2 : PA^2$.

分析 线段成比例问题，往往需要将这些线段集中或转化到同一平面内，利用三角形相似或平行线分线段成比例定理加以证明，为此要作相应的辅助线.



证明 如图8-4,过点 H 作 $HQ \parallel AP$,连接 PQ,则四边形 $PAHQ$ 为矩形.

因为 $PA \perp$ 平面 ABC,所以 $QH \perp$ 平面 ABC.

又因为 $AH \parallel PQ$,所以 $AH \parallel$ 平面 PQC.

过 EF 及点 H 作平面,分别交平面 PQC、QCH 于直线 EK、HK,则 $EK \parallel FH$.

因为 $AH \parallel PQ$,所以 $EK \parallel PQ$,则 $PE : EC = QK : KC$. ①

又因为 $FH \parallel EK$,$EF \perp FH$,所以 $EF \perp EK$.

因为 $EF \perp PC$,所以 $EF \perp$ 平面 PQC,则 $EF \perp QC$.

又因为 $QH \perp$ 平面 ABC,所以 $QH \perp BH$.

因为 $BH \perp CH$,所以 $BH \perp$ 平面 QHC,则 $BH \perp CH$.

又 $EF \perp BH$,且 BH、HK、EF 共面,所以 $KH \parallel EF$.

因为 $EF \perp QC$,所以 $KH \perp QC$.

在 $Rt\triangle QHC$ 中,$QH^2 = QK \cdot QC$,$CH^2 = CK \cdot QC$.

于是,$QH^2 : CH^2 = CK : QK$. ②

由①、②得 $PE : EC = CH^2 : HQ^2$.

因为 $PA = QH$,所以 $PE : EC = CH^2 : QH^2$.

又因为 $QH = PA$,所以 $PE : EC = CH^2 : PA^2$.

图8-4

评注 这是一道平面几何味很浓的问题,证明过程体现了转化的思想.

例5 (第10届中国数学奥林匹克试题)空间有4个球,它们的半径分别为2,2,3,3,每个球都与其余3个球外切.另外有一个小球与这4个球都外切,求小球的半径.

分析 四个球的球心构成一个四面体的四个顶点,由于这四个球两两外切,所以这个四面体的六条棱长分别为4,6,5,5,5,5.画图知,长度为4和6的两条棱只能是相对的,由对称性知,小球的球心必位于这两条棱中点的连线上,剩下来的就是通过解三角形建立关于小球半径的方程.

解 设四个球的球心分别为 A、B、C、D,如图8-5,依题意有 $AB = 6$,$CD = 4$,$AC = BC = AD = BD = 5$.

又设 AB、CD 的中点分别为 E、F,小球的球心为 O,则由对称性知,点 O 在线段 EF 上,并且易知 $EF \perp AB$,$EF \perp CD$.于是

$$EF = \sqrt{AF^2 - AE^2} = \sqrt{AC^2 - CF^2 - AE^2}$$

$$= \sqrt{5^2 - 2^2 - 3^2} = 2\sqrt{3}$$

$$OF = \sqrt{OC^2 - CF^2} = \sqrt{(r+2)^2 - 2^2} = \sqrt{r^2 + 4r},$$

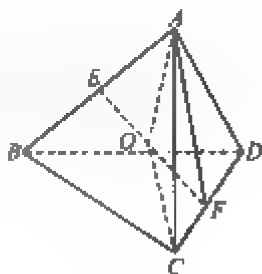


图8-5

$OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{(r+3)^2-3^2}=\sqrt{r^2+6r}$.

其中 r 为小球 O 的半径.

于是,由 $OE+OF=EF$,得 $\sqrt{r^2+6r}+\sqrt{r^2+4r}=2\sqrt{3}$,

即 $\sqrt{r+6}+\sqrt{r+4}=\sqrt{\frac{12}{r}}$. ①

因为 $(\sqrt{r+6})^2-(\sqrt{r+4})^2=2$,所以

$\sqrt{r+6}-\sqrt{r+4}=2\sqrt{\frac{12}{r}}=\sqrt{\frac{3}{r}}$. ②

由①、②得 $2\sqrt{r+6}=\frac{1}{\sqrt{3r}}(r+6)$.

因为 $r>0$,所以 $2\sqrt{3r}=\sqrt{r+6}$.

解得 $r=\frac{6}{11}$ 为所求.

评注 本题入手并不难,在得到方程 $\sqrt{r^2+6r}+\sqrt{r^2+4r}=2\sqrt{3}$ 后,解起来却有着很强的技巧性,需要回到初中解无理方程上去.

例6 同底的两个正三棱锥内接于同一个球,两顶点在底面的异侧.已知两个正三棱锥的底面边长为 a,侧面与底面所成的角分别为 α、β,球的半径为 R,求证:

$$\tan(\alpha+\beta)=-\frac{4\sqrt{3}R}{3a}.$$

分析 这是一个组合几何体,首先应画出符合题意的直观图,再作出两个正三棱锥的侧面与底面所成二面角的平面角,把 $\tan\alpha$、$\tan\beta$ 用 a 和 R 表示,利用两角和的正切公式来证明.当然,在可能的情况下,也可以整体地求出 $\tan\alpha+\tan\beta$ 和 $\tan\alpha\cdot\tan\beta$.

证明 如图8-6,设 $P-ABC$ 和 $Q-ABC$ 是两个同底的正三棱锥,底面边长为 a,它们都内接于半径为 R 的球 O.

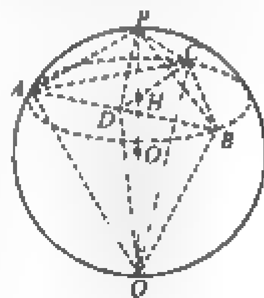


图8-6

连接 PQ,则 $PQ\perp$ 平面 ABC,垂足为 H,且球心 O 在 PQ 上.连接 CH 并延长交 AB 于 D,D 为 AB 的中点,连接 PD、QD.

因为 H 为正 $\triangle ABC$ 的中心,所以 $CD\perp AB$,由三垂线定理,得 $PD\perp AB$,$QD\perp AB$,故 $\angle PDH$、$\angle QDH$ 分别为侧面 PAB 和 QAB 与底面 ABC 所成二面角的平面角,即 $\angle PDH=\alpha$,$\angle QDH=\beta$.

在正 $\triangle ABC$ 中,$DH=\frac{1}{3}CD=\frac{\sqrt{3}}{6}a$,所以 $PH=DH\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}a}{6}\tan\alpha$,



同理，在正三棱锥 $Q-ABC$ 中，有 $QH=\frac{\sqrt{3}a}{6}\tan\beta$.

由 $PH+QH=2R$，得 $\frac{\sqrt{3}}{6}a(\tan\alpha+\tan\beta)=2R$，

即 $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{4\sqrt{3}R}{a}$. ①

又 PQ 是球 O 的直径，则 $\angle APQ=90^\circ$. 又 $AH\perp PQ$，则在 $Rt\triangle PAQ$ 中，由射影定理，得 $AH^2=PH\cdot QH$，

即 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}a}{6}\right)^2\tan\alpha\cdot\tan\beta$，所以

$\tan\alpha\cdot\tan\beta=4$. ②

由①、②得 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{4\sqrt{3}R}{a}}{1-4}=-\frac{4\sqrt{3}R}{3a}$.

评注 我们开始的设想是把 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 分别用 a、R 表示，但由于两个正三棱锥的侧棱长都不知道，所以我们采用了逆向思维，把 PH、QH 分别用 a、R、$\tan\alpha$、$\tan\beta$ 表示，利用 $PH+QH=2R$ 建立了关于 $\tan\alpha$、$\tan\beta$ 的方程①. 再根据球的性质我们又发现了一个隐含条件 $\angle PAQ=90^\circ$，从而应用射影定理建立了关于 $\tan\alpha$、$\tan\beta$ 的方程②. 这时，如果将①、②联立分别求出 $\tan\alpha$、$\tan\beta$，运算量就比较大. 我们注意到两角和的正切公式中含有 $\tan\alpha+\tan\beta$ 和 $\tan\alpha\cdot\tan\beta$，利用整体思想便简捷地得到了结论.

例7 （2005年山东省高中数学竞赛试题）如图8-7，斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面 AA_1C_1C 是面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的菱形，$\angle ACC_1$ 为锐角，侧面 $ABB_1A_1\perp$ 侧面 AA_1C_1C，且 $A_1B=AB=AC=1$.

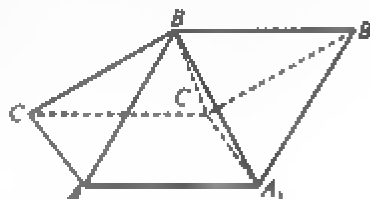


图 8-7

(1) 求证：$AA_1\perp BC_1$；

(2) 求直线 A_1B_1 到平面 ABC 的距离.

分析 要证明 $AA_1\perp BC_1$，可考虑利用三垂线定理证明，也可以利用向量的方法来解决. 要求直线 A_1B_1 到平面 ABC 的距离，注意到 A_1B_1 // 面 ABC，则可转化为求点 A_1 到平面 ABC 的距离，利用体积法来计算，当然也可以利用向量来求.

解 因为侧面 AA_1C_1C 是菱形，所以 $A_1A=A_1C_1=C_1C=CA=1$，所以 $\triangle AA_1B$ 是正三角形. 设 D 是 AA_1 的中点，则 $AA_1\perp BD$. 又侧面 $ABB_1A_1\perp$ 侧面 AA_1C_1C，所以 $BD\perp$ 侧面 AA_1C_1C. 由侧面 AA_1C_1C 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 知，点 C 到 AA_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle AA_1C_1=60^\circ$，从而 $\triangle AA_1C_1$ 是等边三角形，且 $AA_1\perp C_1D$.

[方法1] 如图8-8,以AA_1的中点D为原点,DA_1、DB分别为y轴、z轴建立空间直角坐标.

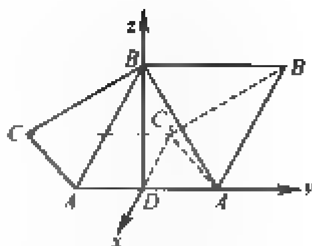


图8-8

(1) 因为$\overrightarrow{AA_1}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC_1}=(0,0,-1)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,-1\right)$,所以$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$

故$AA_1\perp BC_1$.

(2) 设$n=(a,b,c)$为平面ABC的一个法向量,则$n\perp\overrightarrow{AB}$,$n\perp\overrightarrow{AC}$,所以$n\cdot\overrightarrow{AB}=0$,$n\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\left(0,\frac{1}{2},0\right)+\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{A_1D}+\overrightarrow{DC_1}=\left(0,-\frac{1}{2},0\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$.

所以$(a,b,c)\cdot\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}b+\frac{\sqrt{3}}{2}c=0$,

$(a,b,c)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}b=0$.

解得$b=-\sqrt{3}a$,$c=a$,即$n=(a,-\sqrt{3}a,a)$.

因为平面$A_1B_1C_1$∥平面ABC,所以直线A_1B_1到平面ABC的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot n|}{|n|}=\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

[方法2] (1) 如图8-9,显然DC_1是BC_1在平面AA_1C_1C上的射影,因为$AA_1\perp C_1D$,所以由三垂线定理,得$AA_1\perp BC_1$.

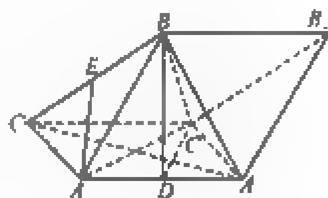


图8-9

(2) 因为A_1B_1∥平面ABC,所以直线A_1B_1到平面ABC的距离h等于点A_1到平面ABC的距离.

由$V_{A_1-ABC}=V_{B-AA_1C}$,得$\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle AA_1C}\cdot BD$.

即$h=\frac{BD\cdot S_{\triangle AA_1C}}{S_{\triangle ABC}}$.

因为$BC_1\perp AA_1$,CC_1∥AA_1,所以$BC_1\perp CC_1$.

在Rt$\triangle BC_1C$中,$BC_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$,$CC_1=1$,则$BC=\sqrt{BC_1^2+CC_1^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

在等腰$\triangle ABC$中,BC边上的高$AE=\sqrt{AC^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.



从而 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot AE = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

又 $S_{\triangle AA_1B_1} = \frac{1}{2}S_{AA_1B_1B} = \frac{\sqrt{3}}{4}$，$BD = \sqrt{A_1B^2 - A_1D^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $h = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{8}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

故直线 A_1B_1 到平面 ABC 的距离为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

评注 本题以棱柱为载体，主要考查几何体中的线面关系及距离的计算，我们给出了向量法和传统的几何法，它们都是解决这类问题的基本方法，应熟练掌握.

例8 证明：任意底面为正 n 边形($n\geqslant 5$)的 n 棱锥不存在正 $n+1$ 边形的截面.

分析 涉及到与自然数有关的问题，数学归纳法是首选，但由于本题为存在性问题，故可考虑用反证法. 当 $n=5$ 时，对于底面为正五边形的五棱锥 $S-A_1A_2A_3A_4A_5$，不妨假设有正六边形截面 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$，可以证明 A_1A_5、A_4B_3、A_2A_3 交于一点(其中 B_3 在 A_3A_4 上)，A_1A_2、A_4B_6、A_4A_5(其中 B_6 在 A_4A_5 上)也交于一点，由此知 A_1B_3 和 A_2B_6 为底面正五边形的两条对称轴. 由此进一步可推证底面对角线 A_1A_4 与 A_2B_3、A_1B_6 交于一点，因此正五边形的对角线 A_1A_4 经过它的中心，这是不可能的. 另外，当 $n=2k-1(k>3)$ 及 $n=2k(k>2)$ 时，可用类似方法推证.

证明 假设正 $n+1$ 边形 $B_1B_2\cdots B_{n+1}$ 是 n 棱锥 $S-A_1A_2\cdots A_n$ 的截面，其中底面 $A_1A_2\cdots A_n$ 是正 n 边形. 我们讨论三种情况：$n=5$，$n=2k-1(k>3)$，$n=2k(k>2)$.

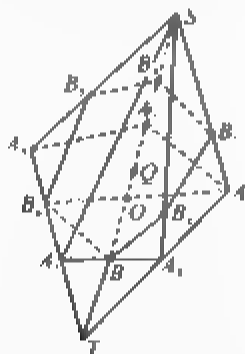


图 8-10

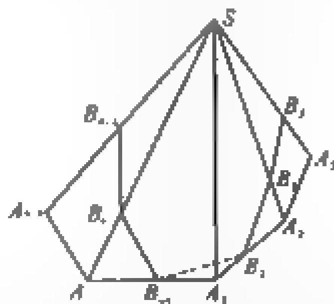


图 8-11

因为 n 棱锥有 $n+1$ 个面，所以截面与棱锥的每一个面各有一条交线. 不失一般性，可以认为点 $B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}$ 在棱锥的各棱上的位置如图8-10和8-11所示(适合于给定的各

种情况)

(1) 当 $n=5$ 时,因为正六边形 $B_1B_2\cdots B_6$ 中直线 B_2B_3、B_5B_6 和 B_1B_4 互相平行,平面 SA_2A_3 经过 B_2B_3,平面 SA_5A_1 经过 B_5B_6,故它们的交线 ST($A_5A_1 \cap A_2A_3 = T$) 平行于这些直线,从而 $ST \parallel B_1B_4$.

经过直线 ST 和 B_1B_4 作平面,这个平面与棱锥底面交于直线 B_1A_4,而直线 B_1A_4 又经过直线 ST 与底面的交点 T,故这样的直线 A_5A_1、A_4B_1 和 A_2A_3 交于一点.

同理,直线 A_1A_2、A_3B_6 和 A_4A_5 也交于一点.

由此推出,直线 A_4B_1 和 A_3B_6 是正五边形 $A_1A_2\cdots A_5$ 的两条对称轴,它们的交点 O 是该五边形中心.

至此,可以推出,如果 Q 是正六边形 $B_1B_2\cdots B_6$ 的中心,则平面 SA_1B_4、SA_4B_1、SB_2B_5 交于直线 SQ. 于是,直线 A_1B_4、A_4B_1、A_2A_5 应交于一点——直线 SQ 与底面的交点. 这说明:正五边形 $A_1A_2\cdots A_5$ 的对角线 A_2A_5 经过它的中心 O,而这是不可能的.

(2) $n = 2k-1 (k > 3)$.

仿(1)同理可证:因为在 $2k$ 边形 $B_1B_2\cdots B_{2k}$ 中,直线 B_1B_2、$B_{k+1}B_{k+2}$ 和 B_kB_{k+3} 互相平行,则直线 A_1A_2、$A_{k+1}A_{k+2}$ 和 A_kA_{k+2} 应交于一点,而这是不可能的.

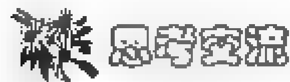
因为在正 $2k-1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2k-1}$ 中,有 $A_{k+1}A_{k+2} \parallel A_kA_{k+3}$,而直线 A_1A_2 和 $A_{k+1}A_{k+2}$ 不平行.

(3) $n = 2k (k > 2)$.

与上述情况类似,可以证明直线 A_1A_2、$A_{k+1}A_{k+2}$ 和 A_kA_{k+3} 互相平行. 于是,直线 B_1B_2、$B_{k+1}B_{k+2}$ 和 B_kB_{k+3} 应交于一点,而这是不可能的. 因为 $B_{k+1}B_{k+2} \parallel B_kB_{k+3}$,而直线 B_1B_2 与 $B_{k+1}B_{k+2}$ 不平行.

综合(1)、(2)、(3)知,假设错误,故命题得证.

评注 我们知道,底面分别是正三角形、正四边形(正方形)的三棱锥、四棱锥,都分别存在正四边形(正方形)、正五边形的截面,但是这个真理再向前跨一步就成为谬误. 值得一提的是,本题的证明看上去可以用数学归纳法,但实际很困难,我们用反证法给出了一种简证.



思考题1 设 O 为正三棱锥 $P-ABC$ 底面 $\triangle ABC$ 的中心,如图8-12,过 O 点的动平面与 $P-ABC$ 的三条侧棱或其延长线的交点分别为 Q、R、S,求证:$\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PR}+\frac{1}{PS}$ 是



个与平面 QRS 位置无关的常量

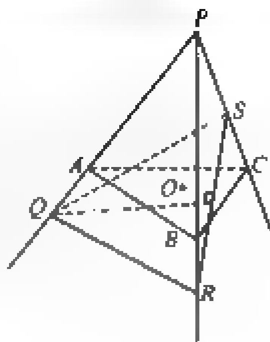


图 8-12

分析 欲证 $\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PR}+\frac{1}{PS}$ 为常量，由于 PQ、PR、PS 的长不定，因此一般可考虑构造出一个关于 PQ、PR、PS 的等式．由于 $P-ABC$ 是给定的正三棱锥，因此 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA$ 为常量，且三条侧棱与相对侧面所成的角均为常量．因此很自然想到可用不同方式计算同一四面体 $PQRS$ 的体积，利用体积法建立关于 PQ、PR、PS 的等量关系．

证明 如图 8-12，四面体 $PQRS$ 可以划分成以 O 为公共顶点，分别以 $\triangle PQR$、$\triangle PRS$、$\triangle PSQ$ 为底面的三个三棱锥，并记 $\angle QPR=\angle QPS=\angle SPQ=\theta$.

又 O 是正三棱锥 $P-ABC$ 底面 $\triangle ABC$ 的中心，所以 O 点到三个侧面的距离相等，可设为 d，则三棱锥 $O-PQR$、$O-PRS$、$O-PSQ$ 的高都是 d，于是有

$$\begin{aligned}V_{PQRS}&=V_{O-PQR}+V_{O-PRS}+V_{O-PSQ}\\&=\frac{1}{6}PQ\cdot PR\cdot\sin\theta\cdot d+\frac{1}{6}PR\cdot PS\cdot\sin\theta\cdot d+\frac{1}{6}PS\cdot PQ\cdot\sin\theta\cdot d.\end{aligned}$$

另一方面，四面体 $PQRS$ 又可以看作是以 Q 为顶点，以 $\triangle PRS$ 为底面的三棱锥．设 PA 与平面 PBC 所成的角为 α，则三棱锥的高是 $PQ\cdot\sin\alpha$，于是又有

$$V_{PQRS}=V_{Q-PRS}=\frac{1}{6}PR\cdot PS\cdot\sin\theta\cdot PQ\cdot\sin\alpha.$$

故 $PQ\cdot PR\cdot d+PR\cdot PS\cdot d+PS\cdot PQ\cdot d=PQ\cdot PR\cdot PS\cdot\sin\alpha$，

即 $\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PR}+\frac{1}{PS}=\frac{\sin\alpha}{d}$ 为常量．

思考题 2 一个八面体的各个面均为全等的四边形，记 $M=\{$棱的长$\}$，求证：

(1) M 中至多有三个元素；

(2) 每个面有两条相等的边所在直线交于一点．

分析 将图形简化，由这个八面体的局部去探求其整体性质是解决本题的关键．因此，可以考虑从共点的几个面入手．为了使图形进一步简化，我们先证明这个八面体存在引出三条棱的顶点，然后依据这样的共点的三个面证明该问题．

证明 由题设知，这个八面体的棱数为 $\frac{4\times 8}{2}=16$ 条，面数为 8，由欧拉定理知，顶点数为 $V=16-8+2=10$.

设 V_i 是引出 i 条棱的顶点数，则 $V_3+V_4+\cdots=10$，$3V_3+4V_4+\cdots=32$．消去 V_3，得 $V_4+2V_5+3V_6+\cdots=2$，因此 $V_4\leqslant 2$，$V_5\leqslant 1$．当 $i\geqslant 6$ 时，$V_i=0$，从而 $V_3>0$，所以至少有一个顶点引出三条棱．



考查顶点A的三个面,设其中一个面的四条边不相等,即a、b、c、d两两不等(如图8-13),由于各面是全等的四边形,则在面Ⅰ中,AB边只可能是a或c,而在面Ⅱ中,AB边只可能是b或d,这是不可能的,所以四条边的长不可能全不相等,即M中至多有三个元素,从而每个面至少有两条边相等,且不可能是对边.故(1)、(2)均得证.

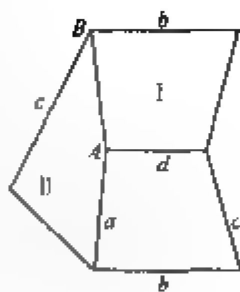


图8-13

评注 本题首先由欧拉定理证明了这个八面体至少有一个顶点可以引出的三条棱,然后考查由这个顶点出发的三个四边形,根据已知条件,这三个四边形全等,推得每个四边形至少有两条边相等,从而使问题得到证明.

同步检测8

一、选择题

1. 给出如下三个命题:

① 底面是正三角形,其余各面都是等腰三角形的棱锥是正三棱锥;

② 各侧面都是等腰三角形的四棱锥是正四棱锥;

③ 底面是正三角形,相邻两侧面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥.

其中,真命题的个数是……………………………………( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. (2003年安徽省高中数学竞赛试题)在棱长为1的长方体M内,作一个内切大球O_1,再在M内的一个角顶内,作小球O_2,使它与大球相外切,同时与正方体的三个面相切,则球O_2的表面积为……………………………………( )

A. $\frac{2-\sqrt{3}}{2}\pi$　　B. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}\pi$　　C. $(7-4\sqrt{3})\pi$　　D. $(7+4\sqrt{3})\pi$

3. (2005年河北省高中数学竞赛试题)在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,$A_1B\perp B_1C$,则直线A_1B与平面BB_1C_1C所成的角等于……………………………………( )

A. $45°$　　B. $60°$　　C. $\arctan\sqrt{2}$　　D. $90°$

4. 正三棱锥相邻两侧面所成二面角是侧面与底面所成二面角的两倍,则侧棱与底面边长之比为……………………………………( )

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$



5. 在棱长为 a 的正方体内有一个内切球，过正方体中两条互为异面直线的棱的中点作直线，该直线被球面截在球内的线段的长为（　）

A. $(\sqrt{2}-1)a$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$　　C. $\frac{1}{4}a$　　D. $\frac{1}{2}a$

6. 一个凸多面体的面数为 8，各面多边形的内角总和为 16π，则它的棱数为（　）

A. 24　　B. 22　　C. 18　　D. 16

7. 在正 n 棱锥中，相邻两侧面所成的二面角的取值范围是（　）

A. $\left(\frac{n-2}{n}\pi,\pi\right)$　　B. $\left(\frac{n-1}{n}\pi,\pi\right)$

C. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{n-2}{n}\pi,\frac{n-1}{n}\pi\right)$

8. 一只小球放入一长方体容器，且与共点的三个面都相接触，小球上有一点到这三个面的距离分别是 3cm、3cm、6cm，则这只小球的半径（　）

A. 只能为 3cm　　B. 只能为 6cm　　C. 只能为 9cm　　D. 以上说法都不对

二、填空题

9. 把四个半径均为 1 的小球装入一个大球内，则此大球半径的最小值为__________.

10. 三棱锥 $S-ABC$ 的底面 $\triangle ABC$ 是正三角形，侧面 $SAC\perp$ 底面 ABC，另两个侧面 SAB、SBC 与底面 ABC 所成的角均为 45°，则二面角 $A-SC-B$ 的大小是__________

11. 半球 O 的半径为 R，它的内接长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的一个面 $ABCD$ 在半球 O 的底面上，则该长方体所有棱长之和的最大值为__________.

12. 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=6$，$CC_1=8$，D 为 AC 的中点，则异面直线 BD 与 AC_1 的距离为__________.

13. (2005 年河南省高中数学竞赛试题) 过半径为 5 的球面上一点 P 作三条两两垂直的弦 PA、PB、PC，且满足 $PA=2PB$，求 $PA+PB+PC$ 的最大值是__________

14. 一凸多面体有 32 个面，每个面是三角形或五边形，V 个顶点，在每个顶点处，有 T 个三角形面和 P 个五边形面相交，则 $100P+10T+V=$__________.

15. 两个半径都是 1 的球 O_1 和球 O_2 相切，且它们均与 60° 的二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个半平面相切，另外一个更大的球 O 和该二面角的两个半平面也都相切，同时与球 O_1 和球 O_2 相外切，那么，球 O 的半径 $R=$__________.

16. 以 O 为球心、4 为半径的球与三条相互平行的直线分别切于 A、B、C 三点，已知 $S_{\triangle OAB}=4$，$S_{\triangle ABC}>16$，则 $\angle BAC$ 的弧度数等于__________



三、解答题

17. 如图8-16，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AC$，D为BC的中点，F为棱BB_1上一点，$BF:FB_1=2:1$，$BF=BC=2a$.

(1) 设E为线段AD上不同于A、D的任意一点，求证：$EF\perp FC_1$；

(2) 试问：若$AB=2a$，在线段AD上的点E能否使EF与平面BB_1C_1C所成的角为$60°$？请说明理由.

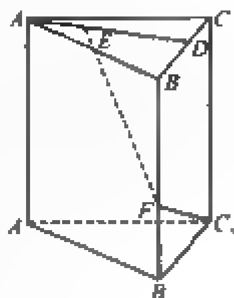


图8-16

18. 如图8-17，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，$\angle BAD=90°$，$AB\parallel CD$，$AD=CD=2AB$，E、F分别为PC、CD的中点.

(1) 求证：$CD\perp$平面BEF；

(2) 设$PA=K\cdot AB$，且二面角$E-BD-C$的平面角大于$30°$，求K的取值范围.

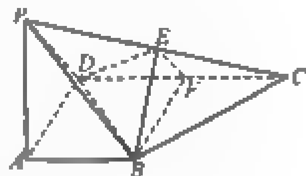


图8-17

19. 在三棱锥$S-ABC$中，侧棱SA、SB、SC两两垂直，G为$\triangle ABC$的重心，D为AB的中点，过D作与SC平行的直线DP. 求证：

(1) 直线DP与SG相交；

(2) 设直线DP与SG相交于点D'，则D'为三棱锥$S-ABC$的外接球的球心.

20. 一个六面体的各个面和一个正八面体的各个面都是边长为a的正三角形，这样两个多面体内切球半径之比是一个既约分数$\frac{m}{n}$，试求$\frac{m}{n}$的值.



第9讲 截面问题

知识点金

用平面去截几何体，平面与几何体表面的交线所围成的平面图形，如凸多边形、圆、椭圆等，就是我们这里所说的截面.

截面问题主要包括作图和计算两个方面.处理截面问题一般分为三个步骤：定位、定形、定量.其中，图形的定位是解决截面问题的关键.作截面的方法源于确定平面的公理3及其三个推论.一般都是先确定一个平面，然后在这个平面内完成作图.

例题精析

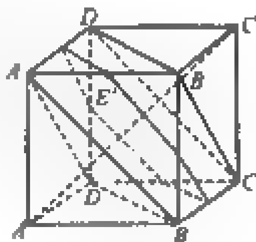


图9-1

例1 (2005年全国高中数学联赛试题)如图9-1，$ABCD-A'B'C'D'$为正方体，任作平面α与对角线AC'垂直，使得α与正方体的每个面都有公共点，记这样得到的截面多边形的面积为S，周长为l，则有 …………（ ）

A. S为定值，l不为定值

B. S为不定值，l为定值

C. S与l均为定值

D. S与l均不为定值

分析 可从极端情形入手，用运动变化的思想探求截面多边形面积S和周长S的变化情况.

解 如图9-1，将正方体切去两个正三棱锥$A-A'BC$和$C'-B'CD'$，得到一个以平

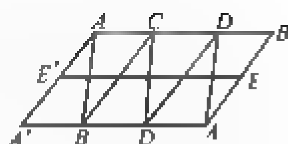


图9 2

行截面ABD和$B'CD'$为上、下底面的几何体V，V的每个侧面都是等腰直角三角形，截面多边形W的每一条边分别与V的底面上的一条边平行．将V的侧面沿棱$A'B'$剪开，展开在一张平面上，得到一个$\square A'B'B_1A_1$，而W的周界展开后便成为一条与$A'A_1$平行的线段(如图9 2中的$E'E_1$)，显然$E'E_1=A'A_1$，故l为定值.

当E'位于$A'B'$中点时，多边形W为正六边形，而当E'移至A'处时，W为正三角形，易知周长l为定值的正六边形与正三角形面积分别为$\frac{\sqrt{3}}{24}l^2$与$\frac{\sqrt{3}}{36}l^2$，故S不为定值，选B.

评注　作为选择题，利用特殊图形进行判断，不失为一种最佳解法．

例2　在棱长为1的正方体$ABCD-A'B'C'D'$中，M、N、P分别是棱B_1C_1、C_1D_1、D_1D的中点，求过M、N、P三点的平面截这个正方体所得截面的面积．

分析　我们先来确定截面的位置和形状，然后再来计算截面的面积.

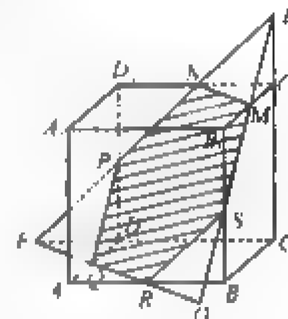


图9 3

解　如图9 3，平面MNP与正方体上底面交于MN，与侧面CC_1D_1D交于NP．设直线NP分别交CC_1、CD延长线于E、F，直线EM交B_1B于S，交CB延长线于G，则F、G为平面MNP与平面$ABCD$的两个公共点，连接FG分别交DA、AB于Q、R，故六边形$MNPQRS$为所求截面．

易知，Q、R、S分别为棱DA、AB、BB_1的中点，所以$MNPQRS$为正六边形，其边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$．故所求截面面积为$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}MN^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

评注　作截面的依据是平面的基本性质和确定平面的条件，基本方法是先确定关键点，再由关键点确定截面与多面体表面的交线．本例采用的是先将截面与多面体的面同时延展，得到一个三角形(即$\triangle EFG$)所在的平面，从而作出了截面图．关于截面多边形形状的判定，这里主要采用了定性分析和定量计算相结合的方法.

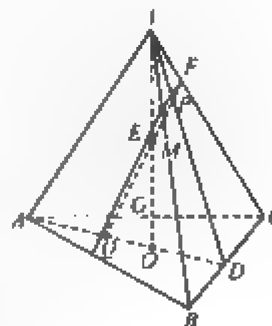


图9 4

例3　如图9 4，正三棱锥$V-ABC$的底面边长为a，侧棱长为b，M为高线VO上一点，且$\frac{VM}{MO}=\frac{b}{a}$．过点$M$作平行于侧棱$VA$及底面边$BC$的平面，求此平面截正三棱锥$V-ABC$所得截面的面积.

分析　要使所作的截面既平行于VA，又平行BC，注意到VA和BC是两条异面直线，则它们可平移为两条相交直线，两条相交直线确定一个平面，且这个平面必须经过点M，如何平移？考虑到正三棱锥的对称性，我们可选取正三棱锥的一个轴截面，在这个轴



截面内来完成作图

解 如图9 ,设过V、A、O三点的平面交BC于点D,则D为BC的中点.在截面VAD内,过点M作PQ VA,分别交VD、AD于点P、Q.在面VBC和ABD内,分别过点P、Q,作EF // BC,GH // BC,交VB、VC于点E、F,交AC、AB于点G、H,则截面$EFGH$分别平行于VA和BC.从而VA // EH,VA // FG,因此EH // FG,所以$EFGH$为平行四边形.又因为$BC \perp VA$,GH // BC,EH // VA,所以$GH \perp EH$,故截面$EFGH$为矩形.

因为$AD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,$AO = \frac{\sqrt{3}}{3}a$,$\frac{AQ}{QO} = \frac{VM}{MO} = \frac{b}{a}$,所以$AQ = \frac{b}{a+b} \cdot AO = \frac{\sqrt{3}ab}{3(a+b)}$.

又$\frac{HG}{BC} = \frac{AQ}{AD} = \frac{2b}{3(a+b)}$,所以$HG = \frac{2ab}{3(a+b)}$.

又$\frac{PQ}{VA} = \frac{DQ}{DA} = \frac{AD - AQ}{AD} = 1 - \frac{2b}{3(a+b)}$,所以$PQ = b - \frac{2b^2}{3(a+b)}$.

故$S_{矩形EFGH} = GH \cdot PQ = \frac{2ab}{3(a+b)}\left[b - \frac{2b^2}{3(a+b)}\right] = \frac{2ab^2(3a+b)}{9(a+b)^2}$.

评注 本题在作截面$EFGH$时,主要应用了直线和平面平行的性质;在计算矩形$EFGH$的边长GH和PQ时,应用了平面几何中的有关知识.

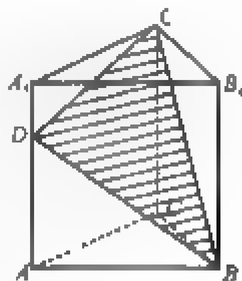


图9 5

例4 如图9 5,正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的各条棱长都是1,过侧面对角线BC_1的截面交棱AA_1于点D,该截面与底面ABC和三个侧面ABB_1A_1、ACC_1A_1、BCC_1B_1所成的二面角依次是α_1、α_2、α_3、α_4,若$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 = \cos\alpha_3 + \cos\alpha_4$,试求截面$\triangle BC_1D$的面积.

分析 显然,截面$\triangle BC_1D$的面积由D点的位置确定.如果设$AD = x$,则$\triangle BC_1D$的面积可用x表示,截面$\triangle BC_1D$在底面和三个侧面上的射影的面积也可以用x来表示.根据射影定理,$\cos\alpha_1$、$\cos\alpha_2$、$\cos\alpha_3$、$\cos\alpha_4$均可用x表示,再根据题设条件可建立关于x的方程,从而求出x的值

解 设$AD = x$,则$A_1D = 1 - x$,从而$BD = \sqrt{1+x^2}$,$C_1D = \sqrt{1+(1-x)^2}$,$BC_1 = \sqrt{2}$.由海伦公式,得

$$S_{\triangle BC_1D} = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2 - 4x + 7}.$$

又$\triangle BC_1D$在底面ABC和三个侧面ABB_1A_1、ACC_1A_1、BCC_1B_1上的射影的面积分别为$\frac{\sqrt{3}}{4}$,$\frac{2-x}{4}$,$\frac{1+x}{4}$,$\frac{2x-1}{4}$,所以,由面积射影定理,得

$$\cos\alpha_1=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4x^2-4x+7}},\cos\alpha_2=\frac{2-x}{\sqrt{4x^2-4x+7}},$$

$$\cos\alpha_3=\frac{1+x}{\sqrt{4x^2-4x+7}},\cos\alpha_4=\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-4x+7}}.$$

由 $\cos\alpha_1+\cos\alpha_2=\cos\alpha_3+\cos\alpha_4$，得

$\sqrt{3}+(2-x)=(1+x)+(2x-1)$.

解得 $x=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$.

故 $S_{\triangle BC_1D}=\dfrac{1}{4}\sqrt{4x^2-4x+7}=\dfrac{3}{8}\sqrt{3}$.

评注 本题应用了面积射影定理，从而回避了作二面角的平面角。另外，引入线段参数 $AD=x$，也是本题解法的一个特色。

例5 正三棱锥 $V-ABC$ 的底面边长为 a，侧棱与底面所成的角为 θ，过底面一边作此三棱锥的截面，当截面与底面所成二面角为何值时，截面面积最小？并求这个最小值。

分析 由于截面三角形的一边是正三棱锥底面三角形的边，它的长是定值，因此截面三角形面积的大小取决于该边上的高。可以用侧棱与底面所成的角 θ 表示三角形的高，通过三角方法求截面面积的最小值，也可以利用异面直线间公垂线最短这一性质求截面面积的最小值。

解法1 如图9-6，设 $\triangle PBC$ 是过 BC 且和 VA 相交于 P 点的截面。

作 $VO\perp$ 平面 ABC，垂足为 O，连接 AO 并延长交 BC 于 D，则 $AD\perp BC$，且 D 为 BC 的中点，从而 $PD\perp BC$，故 $\angle PDA$ 为二面角 $P-BC-A$ 的平面角，设为 x，$\angle VAD$ 为侧棱 VA 与底面 ABC 所成的角，即 $\angle VAD=\theta$.

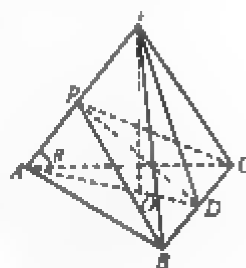


图9-6

在 $\triangle PAD$ 中，$AD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$\angle APD=180^\circ-(x+\theta)$，$\angle PAD=\theta$，由正弦定理，得 $PD=\dfrac{\sqrt{3}a\sin\theta}{2\sin(x+\theta)}$，所以

$$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}BC\cdot PD=\frac{\sqrt{3}a^2\sin\theta}{4\sin(x+\theta)}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\sin\theta.$$

当且仅当 $\sin(x+\theta)=1$，即 $x=90^\circ-\theta$ 时，上式取等号。

故当截面与底面所成角为 $90^\circ-\theta$ 时，截面 $\triangle PBC$ 的面积最小，最小值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\sin\theta$.

解法2 如图9-6，在截面 $\triangle PBC$ 中，因为 $BC=a$ 为定值，所以当高 PD 最小时，



$\triangle PBC$ 的面积取最小值.

在 $\triangle VAD$ 中,因为 BC 的中点 D 为定点,$PD \perp BC$,所以当且仅当 $PD \perp VA$ 时,PD 的长最小.

在 $Rt\triangle APD$ 中,$\angle PDA = 90^\circ - \angle PAD = 90^\circ - \theta$,则 $PD = AD\cos\angle PDA = \frac{\sqrt{3}}{2}a\cos(90^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}a\sin\theta$. 从而

$$S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}BC \cdot PD = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\sin\theta.$$

故当截面 PBC 与底面 ABC 所成的角为 $90^\circ - \theta$ 时,截面 $\triangle PBC$ 的面积最小,最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\sin\theta$.

评注 异面直线上两点连线中,公垂线段最短,利用这一性质求最小值是一种较好的方法.

例6 求证:过正方体中心的任一截面的面积不小于正方体一个侧面的面积.

分析 要证明过正方体中心的截面面积不小于任一侧面的面积,首先需要确定截面多边形的形状,然后进行分类讨论.

证明 首先,过正方体中心的任一截面显然是凸多边形,且这个凸多边形的边数最少为4,最多为6. 因此有如下三种情形:

情形1 若截面是四边形,那么它将与正方体某两相对侧面不相交,并且截面在这两个侧面上的射影是整个侧面,由面积射影定理知,截面四边形的面积不小于正方体一个侧面的面积.

情形2 若截面是五边形,这是不可能的. 因为正方体相对两侧面分别平行,若截面与平行的两侧面之一相交,则它与另一面亦相交.

情形3 若截面是六边形,那么它必与正方体的6个侧面都相交.

图9-7

考查正方体的侧面展开图,如图9-7,可知对截面六边形 $ABCDEF$ 的周长为 p,有不等式

$$p \geqslant |AA'| = \sqrt{(3a)^2 + (3a)^2} = 3\sqrt{2}a.$$

其中 a 是正方体的棱长.

又截面过正方体内切球球心，内切球半径为$\frac{a}{2}$，所以若截面面积为 S，则有

$$S \geq \frac{1}{2}p \cdot \frac{a}{2} \geq \frac{3\sqrt{2}}{4}a^2 > a^2.$$

从而截面面积不小于正方体一个侧面的面积.

评注　按截面的形状进行分类是证明本题的切入点，对于截面为四边形的情形，通过画图发现，这样的截面必与正方体的一双对面不相交，且在它们上的射影是整个侧面正方形，根据面积射影定理作出了判断. 对于截面为六边形的情形，我们注意到正方体的中心(内切球球心)到各边距离大于其到各个面的距离(内切球半径)，并利用侧面展开图求出了截面六边形周长的最小值.

例 7　已知将单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$(如图9-8)沿与投射线 P_1P_2(其中 $P_1 \in B_1C_1$，$P_2 \in D_1D$)平行的方向，平行投影到侧面 ADD_1A_1 所在平面上的影子是图形 $AB'C'D-A'B'C'D'_1$(如图9-9)，其中 P' 是 P_1、P_2 的重影点，且$\frac{B'_1P'}{P'C'_1}=1$，$\frac{D'_1P'}{P'D'}=2$.

(1) 求投影线 P_1P_2 与投影面 ADD_1A_1 所成的角；

(2) 求投影线 P_1P_2 与点 D 所确定的截面的面积.

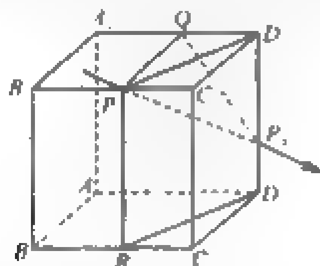


图 9-8

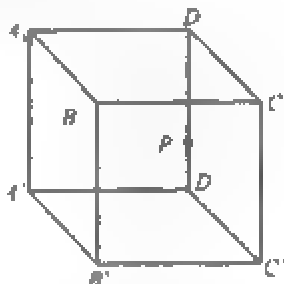


图 9-9

分析　无论是求投影线 P_1P_2 与投影面 ADD_1A_1 所成的角，还是求投影线 P_1P_2 与点 D 所确定的截面的面积，都是在图 9-8 中解决问题. 关键是确定两个投影点 P_1、P_2 的位置. 注意到平行投影保持比例的不变性，从而可确定点 P_1、P_2 的位置.

解　由平行投影保持比例不变的性质，得

$$\frac{B_1P_1}{P_1C_1}=\frac{B'_1P'}{P'C'_1}=1,\ \frac{D_1P_2}{P_2D}=\frac{D'_1P'}{P'D'}=2$$

于是，$P_1C_1=\frac{1}{2}$，$D_1P_2=\frac{2}{3}$.

如图 9-8，过点 P_1 作 $P_1Q \parallel C_1D_1$，交 A_1D_1 于 Q，连接 P_2Q. 因为 $C_1D_1 \perp$ 投影面 ADD_1A_1，所以 $P_1Q \perp$ 投影面 ADD_1A_1，故 P_2Q 为 P_2P_1 在投影面 ADD_1A_1 内的射影，从



而 $\triangle P_1QP_2$ 为直角三角形，且

$P_1Q = C_1D_1 = 1, QD_1 = P_1C_1 = \frac{1}{2}$.

(1) 由上述可知，$\angle P_1P_2Q$ 为投影线 P_1P_2 与投影面 ADD_1A_1 所成的角

在 $Rt\triangle P_1QP_2$ 中，$P_1Q = 1, P_2Q = \sqrt{QD_1^2 + D_1P_2^2} = \frac{5}{6}$，所以 $\tan\angle P_1P_2Q = \frac{P_1Q}{P_2Q}$ $= \frac{6}{5}$，即 $\angle P_1P_2Q = \arctan\frac{6}{5}$.

(2) 首先作出平面 P_1P_2D 与单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面（如图9-8，因为平面 $P_1P_2D \cap$ 平面 $ADD_1A_1 = DD_1$，平面 $BCC_1B_1 /\!/$ 平面 ADD_1A_1，所以

平面 $P_1P_2D \cap$ 平面 $BCC_1B_1 = P_1R$，且 $P_1R /\!/ D_1D$.

其中 $R \in BC$，且 $RC = \frac{1}{2}$.

连接 RD，得截面 P_1RDD_1.

显然，截面 P_1RDD_1 为矩形，其面积为

$S_{P_1RDD_1} = P_1R \cdot P_1D_1 = 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

评注 由上面的解答过程来看，图9-9虽然只起了一个桥梁作用，但是题目的已知条件却集中在这个平面图形上．它的6条外边界线围成了一个平行六边形，这个平行六边形的三组对边的长各是多少，三组对角的大小各是多少度，根据已知条件是可以确定的，留给读者去完成．

例8 设 P、Q 是正四面体 $ABCD$ 内的任意两点，求证：$\cos\angle PAQ > \frac{1}{2}$.

分析 由于 P、Q 是正四面体 $ABCD$ 内任意两点，我们很难从整体上去把握．注意到 P、Q 与 A 三点可确定一个平面，这个平面截四面体得到一个截面，如果在这个截面内来考虑，可把空间分散的条件集中到同一平面内．

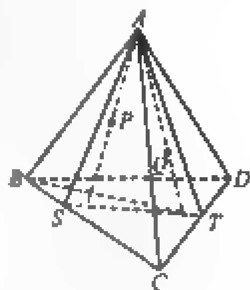


图9-10

证明 当 A、P、Q 三点共线时，$\angle PAQ = 0°$，则 $\cos\angle PAQ = 1 > \frac{1}{2}$，结论显然成立．

当 A、P、Q 三点不共线时，它们确定一个平面 α，平面 α 必与 $\triangle BCD$ 的某两边相交．不妨设 α 与 BC、CD 分别交于 S、T（如图9-10），显然，AS、AT 不是四面体的棱（否则，点 P、Q 在四面体的面上）．

连接 BT，则 $\angle BST = \angle SCT + \angle STC > \angle SCT = 60°$，$\angle SBT < \angle CBD = 60°$，从而 $\angle SBT < \angle BST$，故 $ST < BT = AT$.

同理可证，$ST < AS$.

因此，ST 是 $\triangle AST$ 的最小边，故 $\angle SAT \leqslant 60^\circ$.

又 $\angle PAQ < \angle SAT$，所以 $\angle PAQ < 60^\circ$.

故 $\cos\angle PAQ > \frac{1}{2}$.

评注 本题看上去与截面无关，但是通过作辅助截面，把空间分布散乱的条件集中到同一平面内，使问题得到巧妙的解决.

思考交流

思考题 1 棱长为 1 的正方体的表面上有 P、Q、R 三点，求 $\triangle PQR$ 面积的最大值，并证明你的结论.

分析 根据题目的特点，可考虑用面积射影定理来解. 当然，也可以利用逐步调整法，应用极端原理来解决.

解法 1 如图9-11，设 $\triangle PQR$ 所在的平面与正方体从同一顶点出发的三个面的夹角分别为 α、β、γ，由熟知的结论，有

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

由抽屉原理知，$\cos^2\alpha$，$\cos^2\beta$，$\cos^2\gamma$ 中必有一个不小于 $\frac{1}{3}$，不妨设 $\cos^2\alpha \geqslant \frac{1}{3}$，其中 α 为面 PQR 与面 $ABCD$ 的夹角.

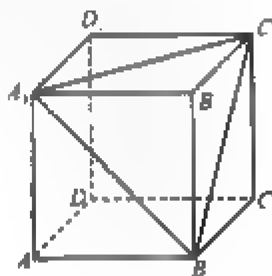


图 9-11

设 $\triangle PQR$ 在正方形 $ABCD$ 上的射影为 $\triangle P'Q'R'$，则

$S_{\triangle P'Q'R'} = S_{\triangle PQR} \cdot |\cos\alpha| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3} S_{\triangle PQR}$.

又正方形 $ABCD$ 内任一三角形的面积不大于该正方形面积的一半，即 $S_{P'Q'R'} \leqslant \frac{1}{2} S_{\text{正方形}ABCD} = \frac{1}{2}$，所以 $S_{\triangle PQR} \leqslant \sqrt{3} S_{\triangle P'Q'R'} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

另一方面，如图 9-11，易知 $\triangle A'BC'$ 的面积等于$\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以上式中的等号可以成立.

故 $\triangle PQR$ 的面积的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解法 2 我们知道，若 $\triangle ABC$ 的一边 AB 固定，顶点 C 在线段 MN 上运动，则 $S_{\triangle ABC} \leqslant \max\{S_{\triangle ABM}, S_{\triangle ABN}\}$（当 AB 与 MN 异面时也成立）



下面采用逐步调整法及上述结论来解本题.

如果 P、Q、R 中有一点不在正方体某一棱上,不妨设为 P 点,则过 P、Q、R 三点作截面,此截面与正方体某一面交于过 P 点的线段 MN,那么 $S_{\triangle PQR} \leqslant \max\{S_{\triangle MQR}, S_{\triangle NQR}\}$,于是取得最大面积的三角形三个顶点都在棱上.

进一步地,若 P 不是正方体的顶点,不妨设点 P 在棱 AB 上,则 $S_{\triangle PQR} \leqslant \max\{S_{\triangle AQR}, S_{\triangle BQR}\}$.由此可知,取得最大面积的三角形的三个顶点必在正方体的顶点处.计 8 个顶点中任三个顶点的三角形面积为 S,可知 $S_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

综上所述,$S_{\triangle PQR} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

上式等号可以成立,如图 9-11,易知 $\triangle A'BC'$ 的面积等于$\frac{\sqrt{3}}{2}$,故 $\triangle PQR$ 面积的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

评注 以上两种解法都是解决此题的基本方法,应认真体会,熟练掌握.

思考题 2 求证:内接于一个球面的正六面体的体积,大于内接于同一球面的正八面体的体积.

分析 取通过正六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的四个在同一平面的顶点 A、C、C_1、A_1 的截面,易知此截面过球心 O,如图 9-12.设球半径为 R,则 $AC_1 = 2R$,$AC = \sqrt{2}AA_1$,利用勾股定理可计算出正方体棱长 AA_1,从而可计算出体积.同理,取通过正八面体 $A-A'B'C'D'-F$ 的四个在同一平面上的顶点 A'、B'、C'、D' 的截面,可证此截面也过球心 O.如图 9-13、9-14,易知 $A'B'C'D'$ 为正方形,则 $A'B' = \frac{\sqrt{2}}{2}B'D' = \sqrt{2}R$,又点 E 到平面 $A'B'C'D'$ 的距离 $OE = R$,由 $V_{E-A'B'C'D'-F} = 2V_{E-A'B'C'D'}$ 亦可计算此正八面体的体积.

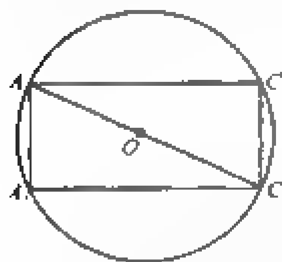


图 9-12

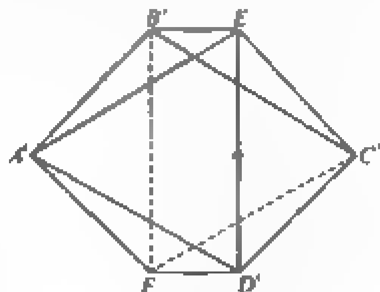


图 9-13

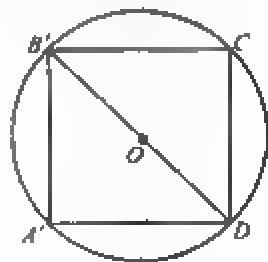


图 9-14

证明 取通过正六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的四个在同一平面的顶点 A、C、C_1、A_1



的截面，此截面过球心 O，画出如图 9-12 所示的截面图. 设球半径为 R，则 $A_1C_1=\sqrt{2}AA_1$，从而 $AC_1=\sqrt{3}AA_1=2R$，所以 $AA_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}R$. 于是

$$V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=AA_1^3=\frac{8}{9}\sqrt{3}R^3.$$

再取正八面体 $E-A'B'C'D'-F$ 的四个在同一平面内的顶点 A'、B'、C'、D' 的截面，此截面也过球心 O，如图 9-13、9-14，易知 $A'B'C'D'$ 为正方形，则 $A'B'=\frac{\sqrt{2}}{2}B'D'=\sqrt{2}R$，所以 $S_{A'B'C'D'}=2R^2$. 又点 E 到平面 $A'B'C'D'$ 的距离 $EO=R$，于是

$$V_{E-A'B'C'D'-F}=2V_{E-A'B'C'D'}=2\cdot\frac{1}{3}S_{A'B'C'D'}\cdot EO=\frac{4}{3}R^3.$$

因为 $\frac{8}{9}\sqrt{3}=\frac{4}{9}\sqrt{12}>\frac{4}{9}\sqrt{9}=\frac{4}{3}$，所以 $V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}>V_{E-A'B'C'D'-F}$.

评注 （ⅰ）由于正六面体（正方体）和正八面体都是轴对称图形，所以通过作出它们的轴截面，可以清楚地反映其棱长与球半径之间的关系；（ⅱ）先将正六面体和正八面体的体积用同一个参数（球 O 的半径）表示，再比较它们的大小，这是一种基本的思路；（ⅲ）值得注意的是，本题的结论似乎与我们的直观印象相反，对于正十二面体和正二十面体，也可得到同样的结论. 事实上，我们还有如下两下结论：

1°一个正十二面体和一个正二十面体，如果内接于同一个球，那么它们有一个共同的内切球；

2°一个正十二面体、一个正二十面体和一个正方体，如果内接于同一个球，那么正十二面体与正二十面体的体积之比，等于正方体与正二十面体的棱长之比.

同步检测9

一、选择题

1.（2005 年浙江省高中数学竞赛试题）对于正方体的截面，给出如下五种凸多边形：

①钝角三角形；　　②直角三角形；

③菱形；　　④正五边形；　　⑤正六边形.

其中不可能是……………………………………（　）

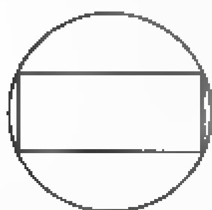
A. ①、②、⑤　　B. ①、②、④　　C. ②、③、④　　D. ③、④、⑤

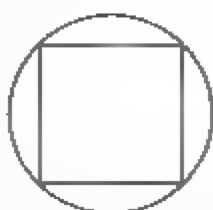
2.（2003 年山东省高中数学竞赛试题）已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 2，所有与它的四个顶点距离相等的平面截这个四面体所得截面的面积之和为……（　）

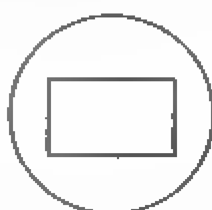


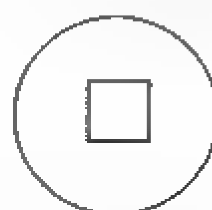
A. 4　　B. 3　　C. $\sqrt{3}$　　D. $3+\sqrt{3}$

3. 一个正方体内接于一个球，现过球心作一个截面，下列图形中，不可能是截面的是 …… ( )

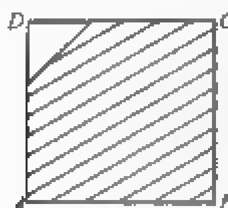

A

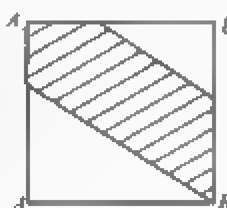

B

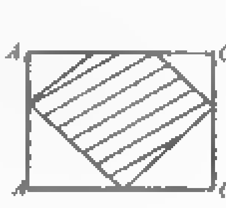

C.

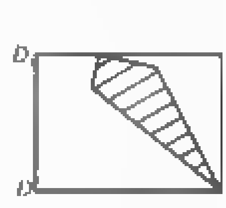

D

4.(2001 年湖南省高中数学竞赛试题)正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 A_1A 的三等分点，F 为 C_1C 的三等分点，$AE=2A_1E$、$CF=2C_1F$. 过 B、E、F 作正方体的截面，下列所示的截面在相应面上的投影图中，错误的是 …… ( )


A


B.


C.


D

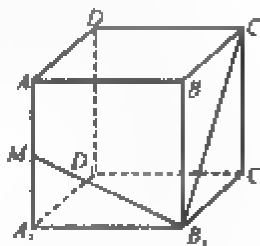
5. 在正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中，M 是 DE 的中点，则过 A_1、C、M 三点的截面是 …… ( )

A. 三角形　　B. 四边形　　C. 五边形　　D. 六边形

6.(2005 年江苏省高中数学竞赛试题)设四棱锥 $P-ABCD$ 的底面不是平行四边形，用平面 α 去截此四棱锥，使得截面四边形是平行四边形，则这样的平面 α …… ( )

A. 只有 1 个　　B. 恰有 4 个　　C. 有无数多个　　D. 不存在

7. 如图 9-15，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 2 的正方体，M 为棱 AA_1 的中点，过 M、B_1、C 三点作一个平面 α 截该正方体，则截面的面积等于 …… ( )


图 9-15

A. $\frac{7}{2}$　　B. 4

C. $\frac{9}{2}$　　D. 5

8.(2004 年湖南省高中数学竞赛试题)过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 的截面面积为 S，S_{max} 和 S_{min} 分别为 S 的最大值和最小值，则 $\frac{S_{max}}{S_{min}}$



的值为…………………………………………………………………………（　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

二、填空题

9. 过四面体同一个顶点的三条棱的中点可以确定一个截面，这样的截面共有四个，用这四个截面截去四个小四面体后，剩下的几何体的表面积与四面体的表面积之比等于__________.

10. 若正方体的棱长为 a，则与正方体一条对角线垂直的最大截面的面积等于__________.

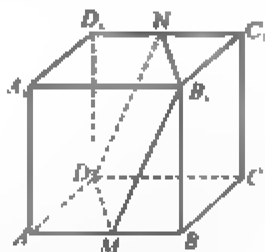


图 9-16

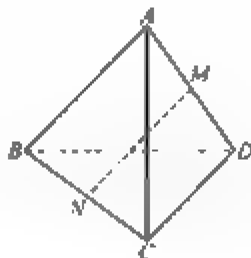


图 9-17

11. (2004 年广西高中数学竞赛试题）如图 9-16，在单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别为 AB、C_1D_1 的中点，则点 C 到截面 MB_1ND 的距离等于__________.

12. 用与圆柱对称成 30° 角的平面截圆柱所得的截面是一个椭圆，则这个椭圆的离心率是__________.

13. 如图 9-17，在棱长为 1 的正四面体 $ABCD$ 中，M、N 分别为 AD、BC 的中点，则过 MN 的平面被此四面体所截得截面面积的最小值为__________.

14. 如图 9-18，在单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 AA_1 上一点，且 $AE=\frac{3-\sqrt{6}}{3}$，过 E、C、D_1 三点作正方体的截面，则此截面与面 CDD_1C_1 所成锐二面角的度数为__________.

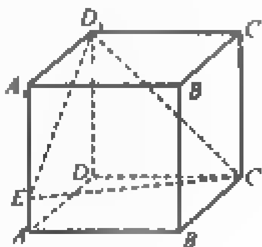


图 9-18

15. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，E 为 CD 的中点，F 为 AA_1 的中点，则过 E、F、B_1 三点的截面面积是__________.

16. 设正三棱锥 $P-ABC$ 的中截面 $A_1B_1C_1$ 的面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$，棱锥的高为 $2\sqrt{6}\text{cm}$，D 为 PA 上一点，则过 B、C、D 三点的截面面积的最小值为__________.



三、解答题

17 正四棱锥 $V-ABCD$ 的底面边长为 a，侧棱长为 b，E、F、O_1 分别为棱 BC、CD 及高 VO 的中点，求过 E、F、O_1 三点的截面面积.

18 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 $2a$，高为 h，过底面一边 BC 作截面与底面成 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 角，求截面的面积.

19. 设正四棱锥 P 的底面是边长为 2 的正方形，高为 h，平面 π 平行于底面的一条对角线，且与 P 的底面所成的角为 α. 把 P 正投影到平面 π 上，问 α 为何值时，所得投影图形的面积最大?并求出这个最大值

20 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是等腰三角形，$AB=AC$，$\angle BAC=\alpha$，AD 是 BC 边上的高. 若此直三棱柱的侧面积为 S，过 BC_1 且 AD 平行的平面与底面所成的角为 β，求此平面被直棱柱截得的截面的面积.



第10讲 几何体的面积和体积

知识点金

面积和体积是立体几何中的两类重要问题，其中体积的计算和应用是重点。

几何体的面积主要包括表面积和截面的面积，其中截面面积的计算我们在上一讲已作过专题讲解，本讲主要是关于几何体表面积的计算。

在掌握好求体积的基本方法的基础上，应重视以下的常用方法和技巧：(1) 转移法（即利用祖暅原理或等积变换，把所求几何体转化为与它等底、等高的几何体的体积）；(2) 分割求和法；(3) 补形求差法；(4) 变换底面求三棱锥（或四面体）的体积。

用两种方法计算同一几何体的体积，从而得出未知元素的等量关系，这是平面几何中面积法的直接推广，用这种方法求点到平面的距离，可免去寻找距离或垂直关系的推理过程。

例题精析

例1 (2003年全国高中数学联赛试题) 在四面体 $ABCD$ 中，设 $AB=1$，$CD=\sqrt{3}$，直线 AB 与 CD 的距离为 2，夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则四面体 $ABCD$ 的体积等于 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

分析 要直接求四面体 $ABCD$ 的体积，困难比较大，我们可以利用补形法，把求四面体体积转化为求三棱柱或四棱锥的体积。当然，考虑到异面直线 AB 与 CD 所成的角，



也可以利用三角形中位线，通过作辅助截面，利用分割求和法，将其转化为求两个拟柱体体积之和.

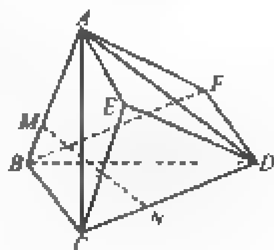


图 10-1

解法 1 如图10-1，过点 C 作 $CE \underline{\parallel} AB$，以 $\triangle CDE$ 为底面，BC 为侧棱作三棱柱 $ABF-ECD$，则所求四面体 $ABCD$ 的体积 V 等于三棱柱 $ABF-ECD$ 体积 V' 的 $\frac{1}{3}$.

因为 $CE \parallel AB$，所以 $\angle ECD$ 为异面直线 AB 与 CD 所成的角，即 $\angle ECD=\frac{\pi}{3}$.

设 MN 为异面直线 AB 与 CD 的公垂线段，则 $MN=2$ 为三棱柱 $ABF-ECD$ 的高. 从而

$$V'=S_{\triangle ECD}\cdot MN=\frac{1}{2}CE\cdot CD\sin\angle ECD\cdot MN=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\frac{3}{2}.$$

故 $V=\frac{1}{3}V'=\frac{1}{2}$，选 B.

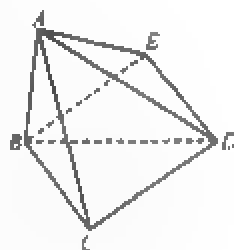


图 10-2

解法 2 如图10-2，过点 B 作 $BE \underline{\parallel} CD$，则四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle ABE$ 为异面直线 AB 与 CD 所成的角，即 $\angle ABE=\frac{\pi}{3}$. 从而

$$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot BE\sin\angle ABE=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}.$$

因为 $CD \parallel BE$，所以 $CD \parallel$ 平面 ABE，故点 D 到平面 ABE 的距离 h 等于异面直线 AB 与 CD 的距离，即 $h=2$.

故 $V_{A-BCD}=V_{A-BDE}=V_{D-ABE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABE}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times 2=\frac{1}{2}$.

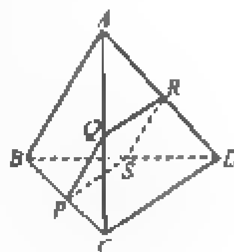


图 10-3

解法 3 如图10-3，分别取 BC、CA、AD、DB 的中点 P、Q、R、S，则四边形 $PQRS$ 为平行四边形，且 $\angle QPS=60°$，$PQ=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}$，$PS=\frac{1}{2}CD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AB \parallel$ 平面 $PQRS \parallel CD$.

设直线 AB、CD 与平面 $PQRS$ 的距离分别为 h_1、h_2，则 $h_1+h_2=2$ 为异面直线 AB 与 CD 的距离.

由拟柱体的体积公式，得

$$V_{ABCD}=V_{AB-PQRS}+V_{CD-PQRS}=\frac{4}{6}S_{PQRS}\cdot(h_1+h_2)$$

$$=\frac{2}{3}PQ\cdot PS\sin\angle QPS\cdot(h_1+h_2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\frac{1}{2}$$

评注 本题的难点在于异面直线AB与CD的距离和它们所成的角这两个条件如何使用. 以上三种解法的共同之处是,通过平移作出了AB与CD所成的角,但是它们之间的距离分别转化为棱(拟)柱体、棱锥体的高,回避了作出表示距离的公垂线段.

例2 正三棱锥的高为h,相邻两侧面所成的二面角为θ,则这个正三棱锥的体积等于______.

分析 要求三棱锥的体积,由于它的高是已知的,所以关键是求底面面积. 因为底面是正三角形,因此只需求出底面边长就可以了.

解 如图10-4,$P-ABC$是已知的正三棱锥,过顶点P作$PO\perp$底面ABC,则垂足O为正$\triangle ABC$的中心. 连接AO并延长交BC于D,D为BC的中点. 再过点B作$BE\perp PA$,垂足为E,连接CE.

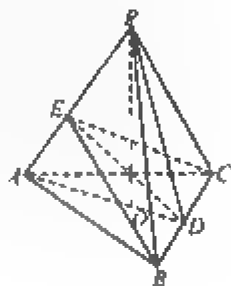


图10-4

因为$\triangle ABE\cong\triangle ACE$,所以$CE\perp PA$,从而$\angle BEC$为二面角$B-PA-C$的平面角,即$\angle BEC=\theta$.

在$\triangle EBC$中,$EB=EC$,D为BC的中点,则$\angle BED=\angle CED=\dfrac{\theta}{2}$.

又$PA\perp$平面EBC,所以$PA\perp DE$.

设正$\triangle ABC$的边长为a,在$\triangle PAD$中,由面积法,得

$$PA=\frac{AD\cdot PO}{DE}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}ah}{\frac{a}{2}\cot\frac{\theta}{2}}=\sqrt{3}h\tan\frac{\theta}{2}.$$

又$PA^2=PO^2+OA^2$,即$\left(\sqrt{3}h\tan\dfrac{\theta}{2}\right)^2=h^2+\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$,

亦即$a^2=3h^2\left(3\tan^2\dfrac{\theta}{2}-1\right)$.

故$V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PO=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot h=\dfrac{\sqrt{3}}{4}h^3\left(3\tan^2\dfrac{\theta}{2}-1\right)$.

评注 本题利用了方程的思想求出了正三棱锥底面边长.

例3 在正三棱锥$P-ABC$中,底面边长为a,相邻两个侧面所成的二面角为θ.

(1) 设D为棱PC上一点,$BD\perp PC$,求BD的长;

(2) 求三棱锥$P-ABC$的体积.

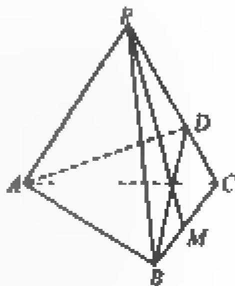


图10-5

分析 首先作出符合题意的直观图,容易得到相邻两侧面所成二面角的平面角,通过解三角形可求出BD的长. 要求正三棱锥$P-ABC$的侧面积,关键是求斜高.

解 (1) 如图10-5,连接AD,由$\triangle ACD\cong\triangle BCD$及$BD\perp PC$,



得 $AD \perp PC$，所以 $\angle ADB$ 为二面角 $A-PC-B$ 的平面角，即 $\angle ADB=\theta$，且 $AD=BD$.

在 $\triangle ADB$ 中，由余弦定理，得

$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\theta$，

即 $a^2=2BD^2(1-\cos\theta)$.

故 $BD=\dfrac{a}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$.

(2) 取 BC 的中点 M，连接 PM，则 $PM\perp BC$，有

$$PC^2=PM^2+CM^2=PM^2+\frac{a^2}{4}. \qquad ①$$

在 $\triangle PBC$ 中，由面积法，得

$PC=\dfrac{BC\cdot PM}{BD}$.

$$即\ PC^2=\frac{BC^2\cdot PM^2}{BD^2}=2PM^2(1-\cos\theta). \qquad ②$$

由①、②消去 PC，得

$PM^2=\dfrac{a^2}{4(1-2\cos\theta)}$，即 $PM=\dfrac{a}{2\sqrt{1-2\cos\theta}}$.

故 $S_{侧}=3S_{\triangle PBC}=3\times\dfrac{1}{2}BC\cdot PM=\dfrac{3a^2}{4\sqrt{1-2\cos\theta}}$.

评注 本题在求斜高 PM 时，主要应用了面积法.

例4 在三棱锥 $S-ABC$ 中，底面 $\triangle ABC$ 每个顶点处的三个面角之和均为 $180°$，底面三角形的三边长分别是 $\sqrt{3}$、2 和 $\sqrt{5}$，求三棱锥 $S-ABC$ 的体积.

分析 注意到底面 $\triangle ABC$ 三个顶点处的三个面角之和均为 $180°$，可将三棱锥沿一条侧棱剪开展平在底面所在平面上，从而可判断三棱锥的特征，然后再考虑如何计算其体积.

解 如图10-6，把三棱锥 $S-ABC$ 的三个侧面沿侧棱剪开展平在底面所在的平面上.

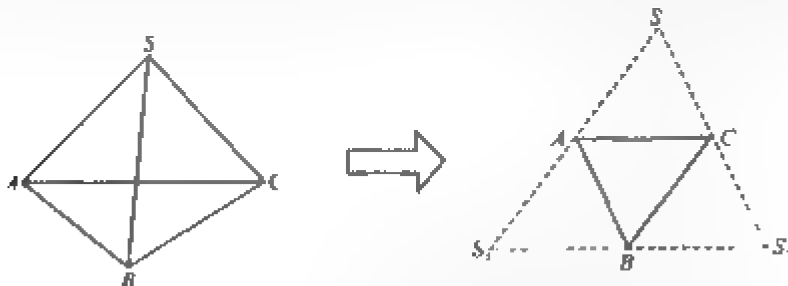


图10-6

因为 $S_1A=S_2A=SA$，$\angle S_1AC+\angle CAB+\angle BAS_2=180°$，所以 S_1、A、S_2 三点共

线，且 A 为 SS_2 的中点.

同理，S_2、B、S_3 三点共线，S_3、C、S_1 三点共线，且 B 为 S_2S_3 的中点，C 为 S_3S_1 的中点.

在 $\triangle SS_2S_3$ 中，$AC = \frac{1}{2}S_2S_3 = SB$.

同理，$AB = SC$，$BC = SA$.

故三棱锥 $S-ABC$ 的三组对棱分别相等.

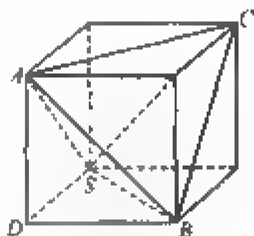


图 10-7

构造如图 10-7 所示的长方体，使 AB、BC、CA 为长方体的三条面对角线，S 为一个顶点.

设长方体的长、宽、高分别为 x，y，z，则

$$\begin{cases} x^2+y^2=(\sqrt{3})^2, \\ y^2+z^2=2^2, \\ z^2+x^2=(\sqrt{5})^2, \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} x=\sqrt{2}, \\ y=1, \\ z=\sqrt{3}. \end{cases}$$

故三棱锥 $S-ABC$ 的体积为

$$V = V_{长方体} - 4V_{S-ABD} = V_{长方体} - 4\times\frac{1}{6}V_{长方体} = \frac{1}{3}V_{长方体} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

评注 对于三组对棱分别相等的三棱锥（等腰四面体）体积的计算问题，常常是通过构造长方体来解决.

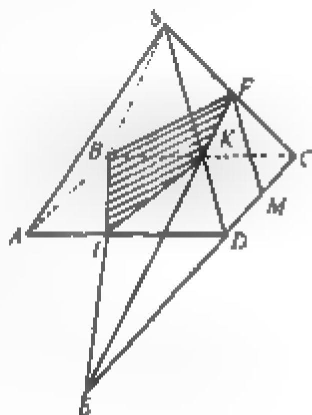


图 10-8

例 5 如图 10-8，在正四棱锥 $S-ABCD$ 中，延长底面一边 CD 到 E，使 $DE=2CD$，过点 B、E 和棱 SC 的中点 F 作一平面，这个平面将四棱锥 $S-ABCD$ 分为两部分，求这两部分体积之比.

分析 四棱锥 $S-ABCD$ 被平面 BEF 所分成的两部分都不是"常规"几何体，可考虑继续分割. 显然，下部几何体的体积等于两个三棱锥 $F-BCE$ 与 $K-IDE$ 体积之差. 当求出下部几何体体积后，上部几何体体积可用求差法得到.

解 如图 10-8，设正四棱锥 $S-ABCD$ 底面边长为 a，高为 h. 设 EF 交 SD 于 K，BE 交 AD 于 I，则

$$S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}BC\cdot CE = \frac{1}{2}a\cdot 3a = \frac{3}{2}a^2.$$

因此，$V_{F-BCE} = \frac{1}{3}S_{\triangle BCE}\cdot h_F = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}a^2\cdot\frac{h}{2} = \frac{1}{4}a^2h.$

因为 $ID \parallel BC$，所以 $\frac{ID}{BC} = \frac{ED}{EC}$，得 $ID = \frac{2}{3}a$.



因此，$S_{\triangle IDE}=\frac{1}{2}ID\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}a\cdot 2a=\frac{2}{3}a^2$.

取 CD 的中点 M，连接 FM，则

$$\frac{KD}{FM}=\frac{ED}{EM}=\frac{4}{5}$$

于是，$KD=\frac{4}{5}FM=\frac{2}{5}SD$.

从而，$V_{K-IDE}=\frac{1}{3}S_{\triangle IDE}\cdot h_K=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}a^2\cdot\frac{2}{5}h=\frac{4}{45}a^2h$

因此，多面体 $KID-FBC$ 的体积为

$V_下=V_{E-FBC}-V_{K-IDE}=\frac{29}{180}a^2h$.

从而，上部几何体的体积为

$V_上=V_{S-ABCD}-V_下=\frac{1}{3}a^2h-\frac{29}{180}a^2h=\frac{31}{180}a^2h$

故上、下两部分体积之比为$\frac{V_上}{V_下}=\frac{31}{29}$.

评注 求体积比往往需要引入参数，本题引入了正四棱锥底面边长和高两个参数.

例 6 如图10-9，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=2a$，$AA_1=a$，$\angle A_1AD=\angle A_1AB=\angle DAB=60°$.

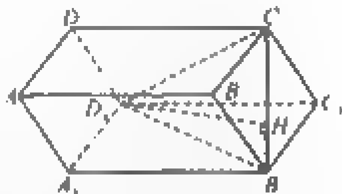


图 10-9

(1) 求证：$AA_1\perp$ 平面 B_1CD_1；

(2) 求平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积.

分析 要证 $AA_1\perp$ 平面 B_1CD_1，由平行六面体的性质，只须证 $CC_1\perp$ 平面 B_1CD_1 即可. 在 $\triangle B_1C_1C$ 中，由余弦定理及勾股定理，不难推出 $\angle B_1CC_1=90°$. 同理可证 $CC_1\perp CD_1$，从而可得 $CC_1\perp$ 面 B_1C_1C. 对于第(2)小题，若能求出一个面上的高，则体积可求. 实际上，由(1)的结论可得，面 $B_1CD_1\perp$ 面 B_1BCC_1，则由面面垂直的性质，只须求出 $\triangle D_1B_1C$ 边 B_1C 上的高即可. 另外，本小题还可以利用积分割法来求解.

解 (1) 在 $\triangle B_1CC_1$ 中，因为 $CC_1=AA_1=a$，$B_1C_1=AD=2a$，$\angle B_1C_1C=\angle BAD=60°$. 由余弦定理，得

$B_1C^2=CC_1^2+B_1C_1^2-2CC_1\cdot B_1C_1\cos60°=3a^2$.

从而 $B_1C^2+CC_1^2=4a^2=B_1C_1^2$，所以 $CC_1\perp B_1C$.

在 $\triangle CC_1D_1$ 中，$CC_1=AA_1=a$，$C_1D_1=AB=2a$，$\angle CC_1D_1=60°$，同理可证 $CC_1\perp CD_1$

所以 $CC_1 \perp$ 平面 B_1CD_1。

又 $AA_1 // CC_1$，所以 $AA_1 \perp$ 平面 B_1CD_1。

(2)[方法 1] 因为 $CC_1 \perp$ 平面 B_1CD_1，所以平面 $B_1CD_1 \perp$ 平面 B_1BCC_1，且平面 $B_1CD_1 \cap$ 平面 $B_1BCC_1 = B_1C$。

如图 10-9，过点 D_1 作 $D_1H \perp B_1C$，垂足为 H，则 $D_1H \perp$ 平面 BB_1C_1C

在 $\triangle B_1C_1D_1$ 中，由余弦定理，得 $B_1D_1 = 2a$；

在 $\triangle B_1CD_1$ 中，由(1)知 $CB_1 = CD_1 = \sqrt{3}a$，

由面积关系，得 $D_1H = \dfrac{B_1D_1 \cdot \sqrt{CB_1^2 - \left(\frac{B_1D_1}{2}\right)^2}}{B_1C} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$

又 $S_{B_1BCC_1} = CC_1 \cdot B_1C\sin 60^\circ = \sqrt{3}a^2$，所以

$V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = S_{B_1BCC_1} \cdot D_1H = 2\sqrt{2}a^3$。

[方法 2] 因为 $CC_1 \perp$ 平面 B_1CD_1，所以平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为

$V = 2V_{BCD-B_1C_1D_1} = 6V_{C_1-B_1CD_1} = 6 \cdot \dfrac{1}{3}S_{B_1CD_1} \cdot CC_1 = 2\sqrt{2}a^3$

评注 在求平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积时有两个难点，一是利用面面垂直，将 B_1BCC_1 看作底面；二是利用面积法求高 D_1H，关键是确定 $\triangle CB_1D_1$ 为等腰三角形。

例 7 如图 10-10，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，截面 DEE_1D_1 // 侧面 BCC_1B_1，二面角 $B-AA_1-C_1$ 与 C_1-BB_1-D 相等，若三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，$ADE-A_1D_1E_1$，$BCD-B_1C_1D_1$ 的侧面积依次是 S、S_1、S_2，求证：$1 < \dfrac{S_1+S_2}{S} \leqslant \dfrac{5}{4}$。

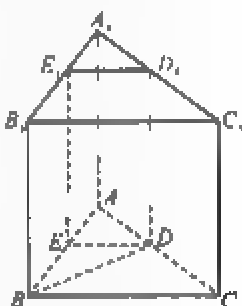


图 10-10

分析 由于三个直三棱柱的高都相等，所以它们的侧面积的比等于其底面三角形周长的比，因此可转化为底面边长来研究。

证明 设 $BC = a$，$CA = b$，$\dfrac{S_1+S_2}{S} = K$，三个棱柱的高均为 h。

易证 $\angle DAE$、$\angle CBD$ 分别是二面角 $B-AA_1-C_1$ 和 C_1-BB_1-D 的平面角，则 $\angle DAE = \angle CBD$。

又截面 DEE_1D_1 // 侧面 BCC_1B_1，所以 $DE // BC$，从而 $\triangle ABC \backsim \triangle AED \backsim \triangle BDC$，所以

$\dfrac{CD}{BC} = \dfrac{BC}{CA}$，即 $CD = \dfrac{a^2}{b}$



从而，$AD=CA-CD=b-\frac{a^2}{b}=\frac{b^2-a^2}{b}$.

于是，$\frac{S_1}{h}:\frac{S}{h}=\frac{S_1}{S}=\frac{AD}{AC}=\frac{b^2-a^2}{b^2}=1-\frac{a^2}{b^2}$　　①

同理，$\frac{S_2}{h}:\frac{S}{h}=\frac{S_2}{S}=\frac{a}{b}$.　　②

① + ② 得　$k=\frac{S_1+S_2}{S}=1+\frac{a}{b}-\left(\frac{a}{b}\right)^2$.

即 $\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}+k-1=0$.

这是关于 $\frac{a}{b}$ 的一元二次方程，其根 $\frac{a}{b}>0$，由根与系数的关系，得

$$\begin{cases}k-1>0,\\ \Delta=1-4(k-1)\geqslant 0.\end{cases}$$

解得 $1<k\leqslant\frac{5}{4}$，即 $1<\frac{S_1+S_2}{S}\leqslant\frac{5}{4}$.

评注　上面的证明过程主要应用了构造一元二次方程的方法，避免了繁杂的运算. 就解题的实质而言，问题可归结为1989年全国初中数学联赛试题：如图10-11，在$\triangle ABC$中，D、E分别是BC、AB边上的点，且$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，如果$\triangle ABC$、$\triangle EBD$、$\triangle ADC$的周长依次为$m$、$m_1$、$m_2$，证明：$\frac{m_1+m_2}{m}\leqslant\frac{5}{4}$.

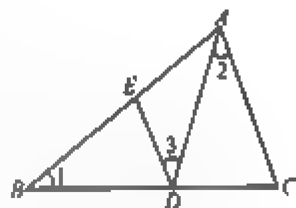


图 10-11

在得出$\triangle EBD\backsim\triangle ABC\backsim\triangle DAC$之后，由周长比等于相似比，有

$$\frac{m_1}{m}=\frac{BD}{BC},\frac{m_2}{m}=\frac{DC}{AC}=\frac{AC}{BC}.$$

从而　$\left(\frac{m_2}{m}\right)^2=\frac{DC}{AC}\cdot\frac{AC}{BC}=\frac{DC}{BC}=1-\frac{BD}{BC}=1-\frac{m_1}{m}$.

于是 $\frac{m_1+m_2}{m}=1+\frac{m_2}{m}-\left(\frac{m_2}{m}\right)^2=-\left(\frac{m_2}{m}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\leqslant\frac{5}{4}$.

当 $\frac{m_2}{m}=\frac{1}{2}$，从而 $CD=\frac{1}{4}BC$ 时可取等号

例8　三棱锥$P-ABC$的底面边长分别为a、b、c，其对棱长分别为a'、b'、c'，求证：以aa'、bb'、cc'为底面三边长，以$b'c'$、$c'a'$、$a'b'$为其相应对棱可构成一个新的三棱锥，且其体积是原三棱锥$P-ABC$体积的$a'b'c'$倍.

分析　我们可先通过作图来说明新三棱锥是存在的，再判断新三棱锥与原三棱锥的



关系，然后证明前者的体积是后者体积的 $a'b'c'$ 倍.

证明 如图 10-12，在射线 PA 上取点 A'，使 $PA'=b'c'$，在侧面 PAB 和 PAC 所在平面上分别作 $\angle PA'B'=\angle PBA$，$\angle PA'C'=\angle PCA$，依次交射线 PB、PC 于 B'、C'，连接 $B'C'$，得三棱锥 $P-A'B'C'$.

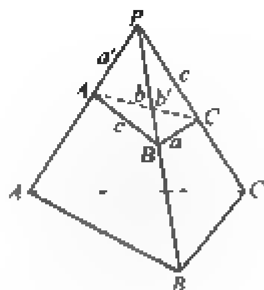


图 10-12

下面证明 $P-A'B'C'$ 是满足条件的新三棱锥.

事实上，由 $\angle PA'B'=\angle PBA$，$\angle PA'C'=\angle PAC$，得

$\triangle PA'B'\backsim\triangle PBA$，$\triangle PA'C'\backsim\triangle PCA$.

有 $\dfrac{PB'}{PA}=\dfrac{PA'}{PB}$，$\dfrac{PC'}{PA}=\dfrac{PA'}{PC}$.

得 $PB'=c'a'$，$PC'=a'b'$.

从而，$\triangle PB'C'\backsim\triangle PCB$，有 $B'C'=\dfrac{BC\cdot PC'}{PB}=aa'$.

同理，$C'A'=bb'$，$A'B'=cc'$.

故 $\dfrac{V_{P-A'B'C'}}{V_{P-ABC}}=\dfrac{PA'\cdot PB'\cdot PC'}{PA\cdot PB\cdot PC}=a'b'c'$.

评注 在本题中，我们首先根据其中的部分条件作出了一个三棱锥 $P-A'B'C'$，然后证明它满足题设的全部条件.



思考交流

思考题 1 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面边长为 a，E 是侧棱 DD_1 上一点，截面 $EAC\,/\!/\,BD_1$，且面 EAC 与底面 $ABCD$ 所成的角为 45°，求三棱锥 B_1-EAC 的体积.

分析 如果直接计算，首先得求底面 $\triangle EAC$ 的面积，这可根据面积射影定理求得，其次是求点 B_1 到平面 EAC 的距离，这可注意 $B_1D\perp$ 平面 EAC. 另外，本题还可以采用分割法来解决.

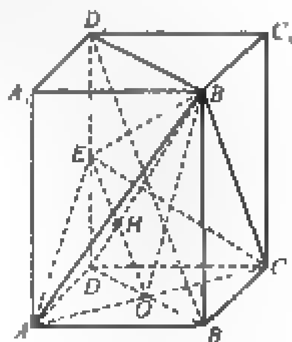


图 10-13

解法 1 如图10-13，连接 BD 交 AC 于 O，连接 EO.

因为底面 ABC 是正方形，所以 $DO\perp AC$.

又 $ED\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $EO\perp AC$.

故 $\angle EOD$ 是二面角 $E-AC-D$ 的平面角，即 $\angle EOD=45°$.

因为 $DO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$AC=\sqrt{2}a$，所以 $EO=\sqrt{2}DO=a$.



故 $S_{\triangle EAC}=\frac{1}{2}AC\cdot EO=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$.

因为 BD_1 // 平面 EAC，所以 $BD_1 // OE$，从而 $\angle D_1BD=\angle EOD=45^\circ$，故 BDD_1B_1 为正方形，$B_1D\perp BD_1$.

因为 BD_1 // 平面 EAC，所以 $B_1D\perp$ 平面 EAC.

设 B_1D 与 EO 交于 H，则 B_1H 为三棱锥 B_1-EAC 的高.

在 Rt$\triangle EDO$ 中，由面积法，得 $DH=\frac{ED\cdot DO}{OE}=\frac{1}{2}a$.

又 $B_1D=\sqrt{2}BD=2a$，所以 $B_1H=B_1D-DH=\frac{3}{2}a$.

故 $V_{B_1-EAC}=\frac{1}{3}S_{\triangle EAC}\cdot B_1H=\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$.

解法2 如图10-13，连接 B_1O，根据对称性，有

$V_{B_1-EAC}=2V_{A-EOB_1}$.

因为 $AC\perp$ 平面 BDD_1B_1，所以 AO 是三棱锥 $A-EOB_1$ 的高.

在正方形 BDD_1B_1 中，E、O 分别为 D_1D、BD 的中点，所以 $S_{\triangle EOB_1}=\frac{3}{4}a^2$.

故 $V_{B_1-EAC}=2V_{A-EOB_1}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}a^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$.

解法3 在正四棱柱中，$AB=a$，$AA_1=\sqrt{2}a$.

因为 $V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=\sqrt{2}a^3$，$V_{B_1-ABC}=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$，$V_{E-ACD}=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$，$V_{E-A_1B_1C_1D_1}=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$，$V_{B_1-EAA_1}=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$，$V_{B_1-ECC_1}=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$.

故 $V_{B_1-EAC}=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}-V_{B_1-ABC}-V_{E-ACD}-V_{E-A_1B_1C_1D_1}-V_{B_1-EAA_1}-V_{B_1-ECC_1}$

$$=\sqrt{2}a^3-\frac{\sqrt{2}}{6}a^3-\frac{\sqrt{2}}{12}a^3-\frac{\sqrt{2}}{6}a^3-\frac{\sqrt{2}}{6}a^3-\frac{\sqrt{2}}{6}a^3=\frac{\sqrt{2}}{4}a^3.$$

评注 在计算几何体的体积或几何体中被截取的部分几何体体积时，要充分利用该几何体的性质，选择恰当的解题方法，以简化计算过程.

思考题2 以相距为 h 的两个平行平面 α、β 为界的几何体，被平行于 α 且距 α 为 $d(0\leqslant d\leqslant h)$ 的平面所截，截面的面积为 ad^2+bd+c，其中 a、b、c 是常数. 求证：这个几何体的体积为

$$V=\frac{1}{6}h(S+S'+4S_0).$$

这里，S、S'、S_0 分别是上、下底面和中截面(即距 α、β 等远的截面)的面积.



分析 本题所述的几何体形状如何，我们不得而知，所以可采用“退”的思想，利用祖暅原理和极限的方法来证明.

证明 将几何体的高 n 等分，过各分点作平行于 α 的截面，每两个相邻截面之间的部分可近似地看作一个柱体，则各部分体积依次为

$$V_1=\frac{h}{n}c,$$

$$V_2=\frac{h}{n}\left[a\left(\frac{h}{n}\right)^2+b\left(\frac{h}{n}\right)+c\right],$$

$$V_3=\frac{h}{n}\left[a\left(\frac{2h}{n}\right)^2+b\left(\frac{2h}{n}\right)+c\right],$$

……

$$V_n=\frac{h}{n}\left[a\left(\frac{n-1}{n}h\right)^2+b\left(\frac{n-1}{n}h\right)+c\right].$$

从而 $V\approx V_1+V_2+V_3+\cdots+V_n$

$$=\frac{h}{n}\left\{a\left[\left(\frac{h}{n}\right)^2+\left(\frac{2h}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}h\right)^2\right]+b\left(\frac{h}{n}+\frac{2h}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}h\right)+nc\right\}$$

$$=\frac{h}{n}\left\{\frac{ah^2}{n^2}\left[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right]+\frac{bh}{n}\left[1+2+\cdots+(n-1)\right]+nc\right\}$$

$$=\frac{h}{n}\left[\frac{ah^2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{bh}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}+nc\right].$$

故 $V=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{h}{n}\left[\frac{ah^2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{bh}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}+nc\right]$

$$=\frac{h}{6}\left\{(ah^2+bh+c)+c+4\left[a\left(\frac{h}{2}\right)^2+b\left(\frac{h}{2}\right)+c\right]\right\}$$

$$=\frac{h}{6}(S+S'+4S_0)$$

同步检测10

一、选择题

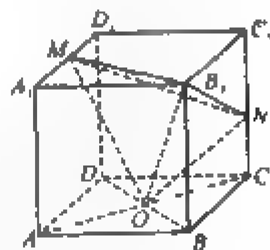


图10-14

1.（2000年河北省高中数学竞赛试题）如图10-14，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，O 为底面正方形 $ABCD$ 的中心，M、N 分别是棱 A_1D_1 和 CC_1 的中点，则四面体 $O-MNB_1$ 的体积是（　）



A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{5}{48}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{7}{48}$

2. 设直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，且面积为 $2\sqrt{3}\text{cm}^2$，$\angle ABC=60°$，E、F 分别是棱 CC_1、BB_1 上的点，且 $EC=BC=2FB$，则四棱锥 $A-BCEF$ 的体积为……（　）

A. $\sqrt{3}\text{cm}^3$　　B. $\sqrt{5}\text{cm}^3$

C. 6cm^3　　D. 9cm^3

3. 若正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，则三棱锥 A_1-BCD 的侧面积是……（　）

A. $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}a^2$　　B. $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})a^2$　　C. $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}a^2$　　D. $(2\sqrt{3}+\sqrt{2})a^2$

4. 如图10-15，在多面体 $ABCDEF$ 中，已知 $ABCD$ 是边长为3的正方形，$EF\parallel AB$，$EF=\frac{3}{2}$，且 EF 与平面 $ABCD$ 的距离为2，则该多面体的体积为……（　）

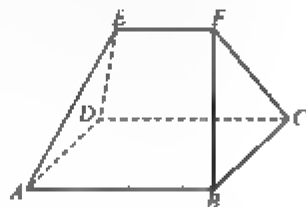


图10-15

A. $\frac{9}{2}$　　B. 5

C. 6　　D. $\frac{15}{2}$

5. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$BC=3$，$CA=4$，$AB=5$，若三个侧面与底面所成二面角 $A-BC-P$ 为 $45°$，$B-CA-P$ 为 $45°$，$C-AB-P$ 为 $45°$，则三棱锥 $P-ABC$ 的体积为……（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6.（2002年安徽省高中数学竞赛试题）一个三棱锥的三个侧面中有两个是等腰直角三角形，另一个是底面边长为1的正三角形，那么这个三棱锥的体积大小……（　）

A. 有唯一确定的值　　B. 有2个不同的值

C. 有3个不同的值　　D. 有3个以上不同的值

7.（2004年天津市高中数学竞赛试题）若对任意的长方体 A，都存在一个与 A 等高的长方体 B，使得 B 与 A 的侧面面积之比和体积之比都等于 k，则 k 的取值范围是……（　）

A. $k>0$　　B. $0<k\leqslant 1$　　C. $k>1$　　D. $k\geqslant 1$

8. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AC_1 为一条体对角线，现以 A 为球心，AB、AD、AA_1、AC_1 为半径作四个同心球，其体积依次为 V_1、V_2、V_3、V_4，则有……（　）

A. $V_1+V_2+V_3>V_4$

B. $V_1+V_2+V_3=V_4$

C. $V_1+V_2+V_3<V_4$



D. $V_1+V_2+V_3$ 与 V_4 的大小不能确定，与长方体的棱长有关

二、填空题

9.（2004 年安徽省高中数学竞赛试题）一个正三棱锥的三条侧棱长均为 1，且两两垂直，将这个正三棱锥绕着它的高线旋转 60°，则旋转后的三棱锥与原三棱锥公共部分的体积等于________.

10.（2005 年江苏省高中数学竞赛试题）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=AD=1$，E、F、G 分别是棱 AA_1、C_1D_1、BC 的中点，那么四面体 B_1-EFG 的体积是________.

11.（2005 年湖南省高中数学竞赛试题）一个球与正四面体的六条棱都相切．若正四面体的棱长为 a，则这个球的体积是________.

12. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 4，5，6，它的外接圆恰好是球 O 的一个大圆，P 为球面上一点．若点 P 到 $\triangle ABC$ 三个顶点的距离都相等，则三棱锥 $P-ABC$ 的体积为________.

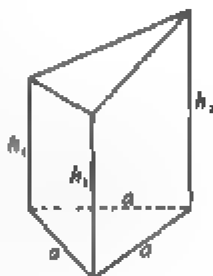


图 10-16

13.（2003 湖南省高中数学竞赛试题）底面边长为 a 的正三棱柱被不平行于底面的平面所截，其中一块的形状如图 10-16 所示，剩余的三条侧棱长分别为 h_1、h_2、h_3，若 h_1、h_2、h_3 成等差数列，则剩下这块几何体的体积为________.

14. 设四面体 $ABCD$ 的体积为 V，E 为棱 AD 的中点，点 F 在 AB 的延长线上，且 $BF=AB$．过 C、E、F 三点的平面交 BD 于 G，则四面体 $CDGE$ 的体积为________.

15. 一个球外接于四面体 $ABCD$，另一个半径为 1 的球与平面 ABC 相切，且两球内切于点 D．已知 $AD=3$，$\cos\angle BAC=\frac{4}{5}$，$\cos\angle BAD=\cos\angle CAD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则四面体 $ABCD$ 的体积等于________.

16. 连接正多面体各个面的中心，得到一个新的正多面体，我们称这个新的正多面体为原多面体的正子体．一个正方体 T_1 的表面积 $S_1=6$，它的正子体为 T_2，表面积为 S_2，T_2 的正子体为 T_3，表面积为 S_3，…，如此下去，记第 n 个正子体 T_n 的表面积为 S_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_1+S_2+\cdots+S_n)=$________.

三、解答题

17.（2001 年湖南省高中数学竞赛试题）如图 10-17，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 4 的正方形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$．设 $PD=6$，M、N 分别为 PB、AB 的中点



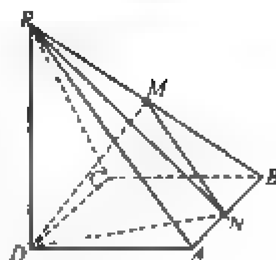


图 10-17

(1) 求三棱锥 $P-DMN$ 的体积；

(2) 求二面角 $M-DN-C$ 的正切值.

18. 在四面体 $ABCD$ 中，过棱 AD、BC 的中点 K、N 作平面，分别交 CD 于 M、交 AB 于 L. 证明：

(1) $DM : MC = AL : LB$；

(2) $S_{\triangle KLN} = S_{\triangle KMN}$.

19. (2005 年莫斯科大学入学试题) 已知四面体 $A-BCD$ 的三条棱长分别为 $AB=3$, $AC=5$, $BD=7$, M、N 分别是棱 AB 和 CD 的中点，且 $MN=2$, 直线 AB 与 AC、BD、MN 所成的角都相等，求四面体 $A-BCD$ 的体积.

20. 一个球内切于正三棱锥，已知棱锥的侧面与底面所成的角为 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，试求棱锥的体积与球的体积之比. 若棱锥的体积与球的体积之比等于我们所求出的值，棱锥的侧面与底面所成的角是否一定是 $\frac{\pi}{3}$？



第11讲　多面角、折叠与展开

知识点金

1. 三面角

(1) 基本概念

有公共端点并且不在同一平面内的 n 条($n\geq 3$)射线，以及相邻两条射线间的平面部分所组成的图形，叫做多面角．其中组成多面角的射线叫做多面角的棱，这些射线的公共端点叫做多面角的顶点，相邻两条棱间的平面部分叫做多面角的面，相邻两条棱所组成的角叫做多面角的面角，相邻两个面所组成的二面角叫做多面角的二面角．

多面角按它的面数可分为三面角、四面角、五面角等．若一个多面角在其每一面所在平面的同一侧，则这个多面角叫做凸多面角，否则为凹多面角．最简单的凸多面角是三面角．三面角可用表示它的顶点和棱的字母来表示，如图 11-1 所示的三面角，记作 $S-ABC$．

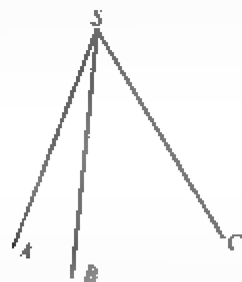


图 11-1

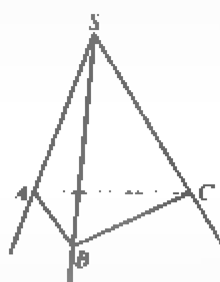


图 11-2

如图 11-2，对于任一已知 $\triangle ABC$，在平面 ABC 外任取一点 S，就可以作出一个三面角 $S-ABC$，反过来，在三面角 $S-ABC$ 的每一条棱上各取一点 A、B、C，就能得到一个 $\triangle ABC$．所以，三面角与三角形有一定的联系，三面角可以看成三角形在空间中的推广，



三面角的面角对应于三角形的角，三面角的二面角对应于三角形的内角. 类比三角形的性质，我们可以得到三面角的一些简单性质.

(2) 三面角的性质

性质 1 三面角的任意两个面角的和大于第三个面角，任意两个面角的差小于第三个面角.

性质 2 三面角的三个面角和小于 2π.

性质 3 三面角的三个二面角和大于 π.

性质 4 三面角中，若两个面角相等，则它们所对的二面角也相等，反之亦成立；若三个面角相等，则三个二面角也相等，反之亦成立.

性质 5 三面角中，若两个面角不相等，则它们所对二面角也不相等，较大的面角所对的二面角也较大，反之亦成立.

性质 6 在两个三面角中

① 若三个面角对应相等，则这两个三面角相等；

② 若三个二面角对应相等，则这两个三面角相等；

③ 若两个二面角及所夹面角对应相等，则这两个三面角相等；

④ 若两个面角及所夹二面角对应相等，则这两个三面角相等；

⑤ 若两个面角对应相等，而它们所夹的二面角不相等，则第三个面角也不相等，较大的二面角所对的面角也较大.

(3) 三面角的正弦定理、余弦定理

在三面角 $S-ABC$ 中，记二面角 $C-SA-B$、$A-SB-C$、$A-SC-B$ 的平面角分别为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，$\angle BSC=\alpha$，$\angle CSA=\beta$，$\angle ASB=\gamma$，则有

正弦定理

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}$$

第一余弦定理

$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A$，

$\cos\beta=\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos B$，

$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos C$.

第二余弦定理

$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\alpha$，

$\cos B=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos\beta$，

$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos\gamma$.

2. 折叠与展开

平面图形经过折叠后变成了空间图形. 这时，原图形中的一部分仍在同一个半平面



内，组成这部分图形的元素(点、线)保持着原有的数量及位置关系.解决折叠问题的关键就是要抓住这些不变量和不变关系.

把一个多面体或旋转体的表面(或它的一部分)展开在同一个平面上，称作多面体或旋转体的表面展开.涉及到几何体表面上两点的最短路程时，常采用这种手段.

折叠和展开是两个对立的方面，它们都是解决立体几何问题的一种常用手段.熟练掌握这两种解题思路，有利于培养思维的灵活性.



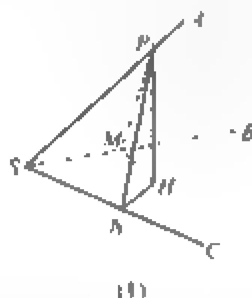
例题精析

例1 在三面角 $S-ABC$ 中，记二面角 $C-SA-B$、$A-SB-C$、$B-SC-A$ 的平面角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，$\angle BSC=\alpha$，$\angle CSA=\beta$，$\angle ASB=\gamma$.求证：

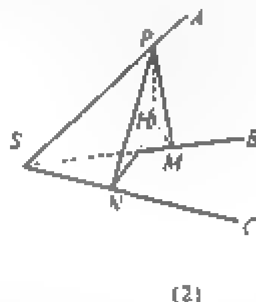
$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

分析 首先需要作出各二面角的平面角，通过解三角形建立角的三角函数关系.

证明 如图11-3，在棱 SA 上取一点 P，使 $SP=1$.过点 P 作 $PH\perp$ 平面 SBC，垂足为 H.



(1)



(2)

图11-3

过点 H 分别作 $HM\perp SB$，$HN\perp SC$，垂足分别为 M、N，连接 PM、PN，则 $PM\perp SB$，$PN\perp SC$，故 $\angle PMH$(或其补角)、$\angle PNH$ 分别为二面角 $A-SB-C$、$A-SC-B$ 的平面角，即 $\angle PMH=\angle B$(如图11-3(1))或 $\angle PMH=\pi-\angle B$(如图11-3(2))，$\angle PNH=\angle C$.又 $\angle PSM=\gamma$，$\angle PSN=\beta$，无论哪一种情况，总有

$$PH=PM\sin B=SP\sin\gamma\sin B=\sin\gamma\sin B.$$

在 $Rt\triangle PNH$ 和 $Rt\triangle PNS$ 中，同理可得

$$PH=\sin\beta\sin C.$$

于是，$\sin\gamma\sin B=\sin\beta\sin C$，即 $\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}$.



同理可证 $\frac{\sin\gamma}{\sin C}=\frac{\sin\alpha}{\sin A}$.

故 $\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}$.

评注 ( )点 P 在平面 SBC 上的射影 H 可能在 $\angle BSC$ 内，也可能在 $\angle BSC$ 外，虽然它们对证明的结果没有影响，但这两种可能都是存在的，应予以考虑.(ⅱ)由于我们要证明的是角的三角函数关系，PH 起到了重要的桥梁作用.

例2 如图11-4，在三面角 $S-ABC$ 中，SD 是 $\angle ASB$ 的平分线，SE 是 $\angle ASC$ 的平分线，SF 是 $\angle BSC$ 的平分线，且 $SD\perp SE$. 求证：$SF\perp SD$，$SF\perp SE$.

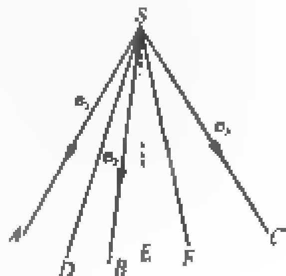


图11-4

分析 注意到角平分线的性质和向量加法的几何意义，本题可考虑用向量法证明.

证明 分别取 $\overrightarrow{SA}$、$\overrightarrow{SB}$、$\overrightarrow{SC}$ 上的单位向量 e_1、e_2、e_3，则 e_1+e_2、e_1+e_3、e_2+e_3，分别在 $\angle ASB$、$\angle ASC$、$\angle BSC$ 的平分线 SD、SE、SF 上.

因为 $SD\perp SE$，所以 $(e_1+e_2)\cdot(e_1+e_3)=0$

从而，$(e_1+e_2)\cdot(e_2+e_3)=e_1\cdot e_2+e_1\cdot e_3+e_2^2+e_2\cdot e_3=e_1\cdot e_2+e_1\cdot e_3+e_1^2+e_2\cdot e_3=(e_1+e_2)\cdot(e_1+e_3)=0$.

故 $SD\perp SF$.

同理可证 $SE\perp SF$.

评注 利用向量证明两条直线是一种常用的基本方法. 在上面的证明过程，为了应用条件 $(e_1+e_2)\cdot(e_1+e_3)=0$，我们将 $(e_1+e_2)\cdot(e_2+e_3)$ 展开式中的 e_2^2 适时的用 e_1^2 代换，目的在于整体的应用条件.

例3 在三面角 $S-ABC$ 中，SD 是面角 BSC 的平分线，求证：

(1) 若 $\angle ASD<\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{1}{2}(\angle ASB+\angle ASC)>\angle ASD$；

(2) 若 $\angle ASD=\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{1}{2}(\angle ASB+\angle ASC)=\angle ASD$；

(3) 若 $\angle ASD>\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{1}{2}(\angle ASB+\angle ASC)<\angle ASD$.

分析 根据题目的特点，可考虑应用三面角的性质来证明

证明 (1) 当 $\angle ASD<\frac{\pi}{2}$ 时，扩展面 ASD，如图11-5，并在这个平面内作 $\angle A'SD$，使 $\angle A'SD=\angle ASD$，则 $\angle ASA'<\pi$.

在三面角 $S-ABD$ 和三面角 $S-A'CD$ 中，$\angle ASD=\angle A'SD$，$\angle BSD=\angle CSD$，



二面角 $A-SD-B=$ 二面角 $A'-SD-C$，由性质 5③ 知，
$\angle ASB=\angle A'SC$.

在三面角 $S-AA'C$ 中，由性质 1 得

$\angle ASC+\angle A'SC>\angle ASA'=2\angle ASD$.

故 $\frac{1}{2}(\angle ASB+\angle ASC)>\angle ASD$.

(2) 当 $\angle ASD=\frac{\pi}{2}$ 时，扩展面 ASD，并在这个平面内作 $\angle A'SD$，使 $\angle A'SD=\angle ASD$，则 $\angle ASA'=\pi$，此时 ASA' 成为一条直线．仿上可证得二面角 $S-ABD$ 与二面角 $S-A'CD$ 相等，从而有 $\angle ASB=\angle A'SC$．所以 $\angle ASC+\angle A'SC=\pi$，即 $\angle ASC+\angle ASB=\pi$，于是

图 11-5

$$\frac{1}{2}(\angle ASB+\angle ASC)=\angle ASD.$$

(3) 当 $\angle ASD>\frac{\pi}{2}$ 时，扩展面 ASD，并在这个平面内作 $\angle A'SD$，使 $\angle A'SD=\angle ASD$，则 $\angle ASD+\angle A'SD>\pi$.

由性质 5③ 得 $\angle ASB=\angle A'SC$．在三面角 $S-AA'C$ 中，$\angle ASA'=2\pi-2\angle ASD$．又由性质 2，得

$\angle ASC+\angle A'SC+\angle ASA'<2\pi$，

即 $\angle ASC+\angle ASB+2\pi-2\angle ASD<2\pi$.

故 $\frac{1}{2}(\angle ASB+\angle ASC)<\angle ASD$.

评注 在三个小题中，都需要扩展面 ASD，并在此平面内作 $\angle A'SD=\angle ASD$，根据两个三面角相等，得到 $\angle ASB=\angle A'SC$，然后利用性质 1 得到结论．

例 4 如图 11-6，把长为 4、宽为 3 的长方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角，求折叠后 B、D 两点间的距离．

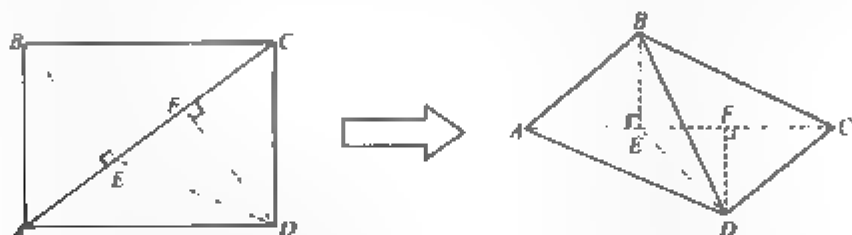


图 11-6

分析 将问题转化为平面几何问题，把 BD 置于某一可解三角形中，这时就需要作



辅助线。另外，求 B、D 两点间的距离，最容易联想到的便是异面直线上两点间的距离公式。

解法 1 在平面图和直观图中分别作 $BE\perp AC$，垂足为 E，连接 DE.

在直观图中，因为面 $ABC\perp$ 面 ACD，$BE\perp AC$，所以 $BE\perp$ 面 ACD，从而 $BE\perp DE$.

在平面图中，由面积关系，得

$$BE=\frac{AB\cdot BC}{AC}=\frac{12}{5}$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$\cos\angle CAD=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{4}{5}$.

在 $\triangle ADE$ 中，由余弦定理，得

$$\begin{aligned}DE^2&=AE^2+AD^2-2AE\cdot AD\cos\angle CAD\\&=(AB^2-BE^2)+AD^2-2\sqrt{AB^2-BE^2}\cdot AD\cos\angle CAD\\&=\left(3^2-\frac{144}{25}\right)+4^2-2\sqrt{3^2-\frac{144}{25}}\cdot4\cdot\frac{4}{5}\\&=\frac{193}{25}.\end{aligned}$$

在直观图中，$BD^2=BE^2+DE^2=\dfrac{144}{25}+\dfrac{193}{25}=\dfrac{337}{25}$.

故 $BD=\dfrac{\sqrt{337}}{5}$.

解法 2 在直观图中，分别作 $BE\perp AC$，$DF\perp AC$，垂足分别为 E、F. 显然，B、D 分别是异面直线 BE 和 DF 上的点.

因为 $BE\perp AC$，所以 $BE\perp$ 面 ACD，则 $BE\perp DF$，故异面直线 BE 和 DF 所成的角为 90°，且它们的距离为线段 EF 的长.

因为 $BE=DF=\dfrac{12}{5}$，$d=EF=AC-2AE=AC-2\sqrt{AB^2-BE^2}=5-2\sqrt{3^2-\dfrac{144}{25}}=\dfrac{7}{5}$，所以 $BD^2=EF^2+BE^2+DF^2-2BE\cdot DF\cos90^\circ=\dfrac{337}{25}$.

故 $BD=\dfrac{\sqrt{337}}{5}$.

评注 当折成的二面角不是直二面角时，以上两种方法仍适用.

例 5 如图 [illegible](1)，在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中，$AC=2$，$BC=3$，P 为斜边 AB 上一点，现沿 CP 将此直角三角形折成直二面角 $P-AC-B$，当 $AB=\sqrt{7}$ 时，求二面角 $P-AC-B$ 的大小.

分析 首先会想到确定二面角 $P-AC-B$ 的平面角，但这还需先确定 P 点的位置



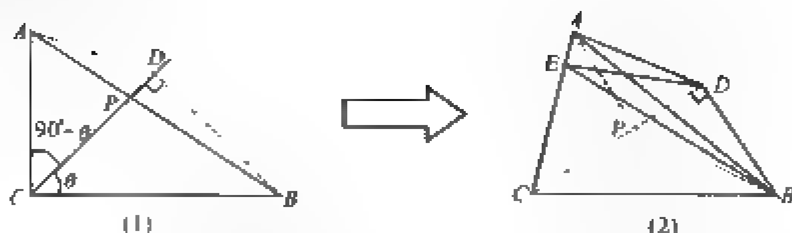


图11-7

为了确定 P 点的位置，可引入线段参数（AP 或 BP），也可以引入角参数（$\angle ACP$ 或 $\angle BCP$），然后利用 $AB=\sqrt{7}$ 建立关于这个参数（线段或角）的方程.

当 P 点的位置确定后，再根据三垂线定理作出这个二面角的平面角. 另外，本题还可以利用面积射影公式求二面角 $P-AC-B$ 的大小.

解法1 设 $\angle BCP=\theta$. 如图11-7(2)，过点 B 作 $BD\perp CP$，垂足为 D，则由面 $ACP\perp$ 面 BCP，得 $BD\perp$ 平面 ACP，从而 $BD\perp AD$.

如图11-7(1)，$BD=3\sin\theta$，$CD=3\cos\theta$. 在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理，得

$$\begin{aligned}AD^2&=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos(90^\circ-\theta)\\&=4+9\cos^2\theta-2\cdot2\cdot3\cos\theta\cdot\sin\theta\\&=4+9\cos^2\theta-6\sin2\theta.\end{aligned}$$

如图11-7(2)，在 $Rt\triangle ADB$ 中，有

$$AD^2+BD^2=AB^2，即 4+9\cos^2\theta-6\sin2\theta+9\sin^2\theta=7，$$

亦即 $\sin2\theta=1$，所以 $\theta=45^\circ$.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $\cos\angle ACB=\frac{1}{2}$，即 $\angle ACB=60^\circ$.

在图11-7(2)中，过 D 作 $DE\perp AC$，垂足为 E，连接 BE，则由三垂线定理，得 $BE\perp AC$，故 $\angle BED$ 为二面角 $P-AC-B$ 的平面角.

在 $Rt\triangle BDE$ 中，$BD=3\sin45^\circ=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$BE=3\sin60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，则 $\sin\angle BED=\frac{BD}{BE}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

故 $\angle BED=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

解法2 如图11-8(1)，作 $AD\perp CP$，分别交 BC、CP 于 D、E，则 $AE\perp$ 平面 BCP.

同解法1，得 $\angle ACE=\angle DCE=45^\circ$，$\angle DCF=60^\circ$，则 $DE=CE=2\cos45^\circ=\sqrt{2}$，$CD=CA=2$.

如图11-8(2)，过点 E 作 $EF\perp AC$，垂足为 F，连接 DF，则由三垂线定理，得 $DF\perp$



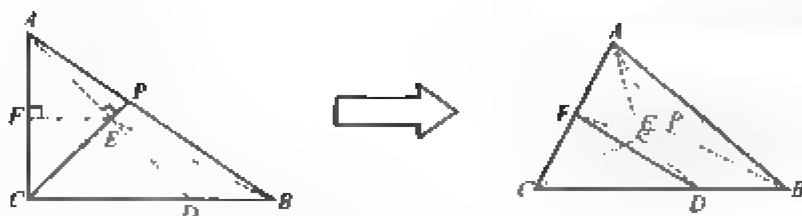


图 11-8

AC，故 $\angle EFD$ 为二面角 $P-AC-B$ 的平面角。

在 $Rt\triangle DEF$ 中，$DE=\sqrt{2}$，$DF=CD\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，所以 $\sin\angle EFD=\frac{DE}{DF}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 $\angle EFD=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$。

解法 3 如图 11-9，过点 B 作 $BD\perp CP$，垂足为 D，则 $BD\perp$ 平面 ACP，从而 $\triangle ABC$ 在平面 ACP 上的射影是 $\triangle ACD$。

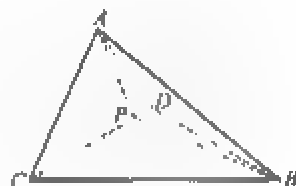


图 11-9

设二面角 $P-AC-B$ 的大小为 α。

同解法 1，得 $\angle ACD=45^\circ$，$\angle ACB=60^\circ$，则 $CD=BC\cos 45^\circ=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，从而

$$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD\sin 45^\circ=\frac{3}{2},$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

故 $\cos\alpha=\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $\alpha=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$。

评注 （Ⅰ）本题通过引入角参数，为我们提供了利用三角方法确定 P 点位置的条件。（Ⅱ）前两种解法都是作出了二面角 $P-AC-B$ 的平面角，但却不相同，读者应认真体会；解法 3 运用面积射影公式，回避了作二面角的平面角。（Ⅲ）当我们求得 $\angle ACP=\angle BCP=45^\circ$ 后，也可以利用三面角的余弦公式求 $\angle ACB$ 的度数。

例 6 正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 a，将此正六边形沿对角线 AD 折成二面角 $M-AD-N$，问当二面角 $M-AD-N$ 的大小为多少时，CF 与 AD 所成的角为 45°？并求这时三棱锥 $F-CDE$ 的体积。

分析 如图 11-10(1)、(2)，将直观图与平面图形对照，折叠后仍有 $EG\perp AD$，$CG\perp AD$，所以 $\angle EGC$ 为二面角 $M-AD-N$ 的平面角。因为 $EF\parallel AD$，所以 $\angle CFE$ 为直线 FC 与 AD 所成的角，问题等价于当 $\angle CFE=45^\circ$ 时，求 $\angle EGC$ 的大小和三棱锥 $F-CDE$ 的体积。



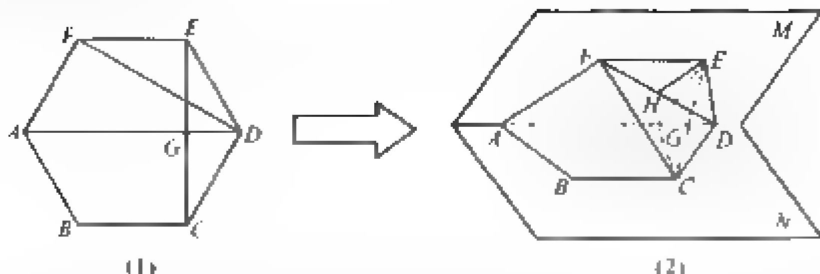


图11-10

解 在图11-10(1)中,连接CE交AD于G,则$EG\perp AD$,$CG\perp AD$.在图11-10(2)中,仍有$EG\perp AD$,$CG\perp AD$,所以$\angle EGC$为二面角$M-AD-N$的平面角.

又$FE\parallel AD$,所以$\angle FEC$为直线FC与AD所成的角,即$\angle FEC=45^\circ$.

又$AD\perp$平面EGC,所以$FE\perp$平面EGC,从而$FE\perp EC$.

设$EG=EF=a$,易知$EG=CG=\frac{\sqrt3}{2}a$.在$\triangle EGC$中,由余弦定理,得

$$\cos\angle EGC=\frac{EG^2+CG^2-EC^2}{2EG\cdot CG}=\frac13$$

即$\angle EGC=\arccos\frac13$.

又$EF=ED=a$,$\angle DEF=120^\circ$,所以$DF=\sqrt3a$.由$FC^2=CE^2+EF^2=2a^2$,$CD=a$,故$\triangle CDF$为直角三角形.

过点E作$EH\perp$平面CDF,垂足为H.因为$EF=ED=EC=a$,所以H为$\triangle CDF$的外心,即H为斜边DF的中点,且$EH=\sqrt{EF^2-FH^2}=\sqrt{a^2-(\frac{\sqrt3}{2}a)^2}=\frac a2$.

故$V_{F-CDE}=V_{E-CDF}=\frac13S_{\triangle CDF}\cdot EH$

$$=\frac13\cdot\frac a2\cdot\sqrt2a\cdot\frac a2=\frac{\sqrt2}{12}a^3.$$

评注 解答折叠问题,可将折叠前、后的平面图形与立体图形放在一起进行对照,有利于发现它们的不变因素.

例7 设正三棱锥$V-ABC$的底面边为1,侧棱长为8,过点A作平面与侧棱VB、VC分别交于D、E,求截面$\triangle ADE$周长的最小值.

解 沿侧棱VA将正三棱锥$V-ABC$如图11-11(1)表面剪开,其展开图如图11-11(2)所示,当且仅当点D、E在线段AA'上时,$\triangle ADE$的周长最小.

设$\angle AVB=\angle BVC=\angle CVA=\theta$,则$\angle AVA'=3\theta$.



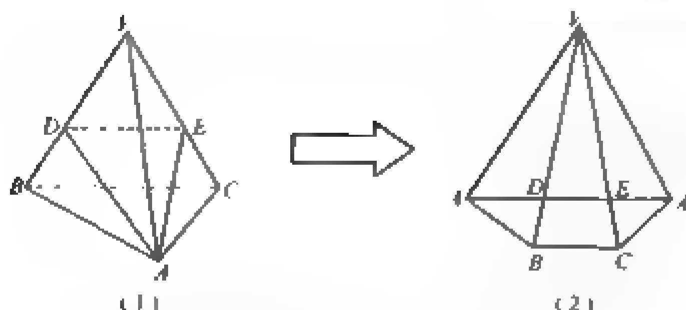


图11 11

在 $\triangle VBC$ 中，由余弦定理，得

$$\cos\alpha = \frac{VB^2 + VC^2 - BC^2}{2VB \cdot VC} = \frac{8^2 + 8^2 - 4}{2 \times 8 \times 8} = \frac{7}{8}$$

所以 $\cos\angle AVA' = \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \frac{7}{128}$

在 $\triangle AVA'$ 中，由余弦定理，得

$$AA' = \sqrt{VA^2 + VA'^2 - 2VA \cdot VA'\cos 3\alpha} = \sqrt{8^2 + 8^2 - 2 \times 8 \times 8 \times \frac{7}{128}} = 11$$

故截面 $\triangle ADE$ 的周长的最小值为11.

评注 对于几何体表面上两点距离的最小值问题，往往通过展开图，转化为平面几何问题来解决.

例8 三棱锥 $A-BCD$ 满足下列两个条件：

① $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAD = 90°$；

② $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 90°$

若 $\cos 70° = 0.3420$，试证二面角 $A-BC-D$ 大于 $70°$.

分析 容易作出二面角 $A-BC-D$ 的平面角，但要证明它大于 $70°$，根据余弦函数的单调性，就需要证明它的余弦值小于0.3420. 注意到已知条件中角的特殊性，我们可以把三棱锥的四个面展开在同一平面上，然后寻找各条棱长的关系

证明 设 $AD=x$，$BD=a$，$CD=b$. 将三棱锥 $A-BCD$ 沿棱 AD、BD、CD 剪开，然后将 $\triangle ADB$、$\triangle ADC$ 分别沿 AB、AC 都展开在 $\triangle ABC$ 所在平面内（如图11-12），得五边形 $ADBCD'$

由题设知 $\angle DAD' = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAD = 90°$，$AD' = AD = x$.

延长 DB、$D'C$ 交于 E，则 $ADED'$ 为正方形，且 $BE = x-a$，$CE = x-b$，$BC = \sqrt{a^2+b^2}$.

在 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中，有 $BC^2 = BE^2 + CE^2$，即

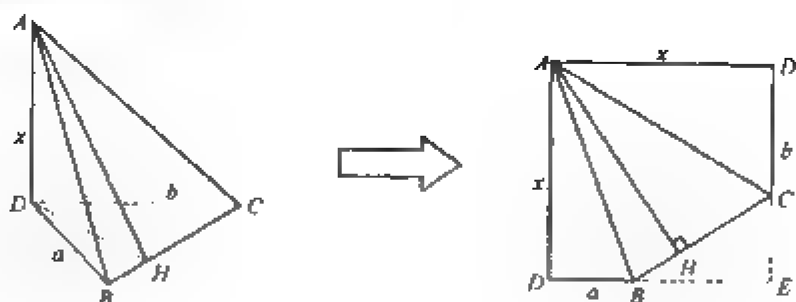


图11-12

$$a^2+b^2=(x-a)^2+(x-b)^2.$$

解得 $x=a+b$.

在三棱锥 $A-BCD$ 中,过 D 作 $DH\perp BC$,连接 AH,则 $AH\perp BC$,故 $\angle AHD$ 为二面角 $A-BC-D$ 的平面角.

记 $\angle AHD=\theta$,则 $\cos\theta=\dfrac{DH}{AH}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDC$ 中,$DH=\dfrac{BD\cdot CD}{BC}=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADH$ 中,$AH=\sqrt{AD^2+DH^2}=\sqrt{(a+b)^2+\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}=\dfrac{a^2+ab+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

从而,$\cos\theta=\dfrac{DH}{AH}=\dfrac{ab}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{ab}{(a-b)^2+3ab}$

$$\leqslant\frac{ab}{3ab}=\frac{1}{3}<0.3420=\cos 70^\circ.$$

因为 $y=\cos\theta$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数,所以 $\theta>70^\circ$,即二面角 $A-BC-D$ 大于 70°.

评注 利用展开图研究多面体的有关性质,是把空间图形转化为平面图形的一种重要途径,本题由已知条件中角的特殊关系,联想到展开图为正方形



思考题1 如图11-13,从 P 点出发的三条射线 PA、PB、PC 两两所成的角分别为 $\angle APB=\alpha$,$\angle BPC=\beta$,$\angle CPA=\gamma$,试求:

(1) PC 与平面 PAB 所成的角 θ;

(2) 二面角 $A-PC-B$ 的余弦值.



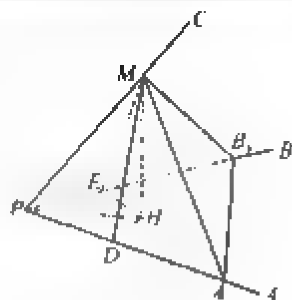


图 11-13

解 (1) 如图 11-13，在射线 PC 上取一点 M，使 $PM=1$，过 M 作 $MH\perp$ 平面 PAB，垂足为 H. 过 H 分别作 $HD\perp PA$、$HE\perp PB$，垂足分别为 D、E，连接 MD、ME，则 $MD\perp PA$，$ME\perp PB$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle MDP$ 中，$PD=PM\cos\angle CPA=\cos\gamma$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle MEP$ 中，$PE=PM\cos\angle BPC=\cos\beta$.

于是，在 $\triangle PDE$ 中，由余弦定理，得

$$\begin{aligned}DE^2&=PD^2+PE^2-2PD\cdot PE\cos\angle\alpha\\&=\cos^2\gamma+\cos^2\beta-2\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha.\end{aligned}$$

因为 $HD\perp PA$，$HE\perp PB$，所以四边形 $PDHE$ 为圆内接四边形，且 PH 是圆的直径.

在 $\triangle PDE$ 中，由正弦定理，得

$$\frac{DE}{\sin\alpha}=PH.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle MHP$ 中，$\cos\angle MPH=\dfrac{PH}{MP}=PH$，所以有

$$\cos\theta=\frac{DE}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\alpha}.$$

故直线 PC 与平面 PAB 所成角为 $\theta=\arccos\dfrac{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\alpha}$.

(2) 过点 M 分别在平面 PAC 和平面 PBC 内作 PC 的垂线，分别交 PA 于 A_1，交 PB 于 B_1，则 $\angle A_1MB_1$ 为二面角 $A-PC-B$ 的平面角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PMA_1$ 中，$MA_1=\tan\gamma$，$PA_1=\dfrac{1}{\cos\gamma}$；

在 $\mathrm{Rt}\triangle PMB_1$ 中，$MB_1=\tan\beta$，$PB_1=\dfrac{1}{\cos\beta}$.

在 $\triangle PA_1B_1$ 中，由余弦定理，得

$$\begin{aligned}A_1B_1^2&=PA_1^2+PB_1^2-2PA_1\cdot PB_1\cos\alpha\\&=\frac{1}{\cos^2\gamma}+\frac{1}{\cos^2\beta}-\frac{2\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}.\end{aligned}$$

在 $\triangle MA_1B_1$ 中，由余弦定理，得

$$\begin{aligned}\cos\angle A_1MB_1&=\frac{MA_1^2+MB_1^2-A_1B_1^2}{2MA_1\cdot MB_1}\\&=\frac{\tan^2\gamma+\tan^2\beta-\dfrac{1}{\cos^2\beta}-\dfrac{1}{\cos^2\gamma}+2\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}}{2\tan\beta\tan\gamma}\end{aligned}$$



$$= \frac{2+\frac{2\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}}{2\tan\beta\tan\gamma}$$

$$\cos\alpha \cdot \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

评注　本题入手较容易，在作出直线与平面所成的角和二面角的平面角后，关键是多次利用余弦定理解三角形.

思考题 2　如图 11-14(1)，G 为 $\triangle ABC$ 的重心，且点 G 在 $\triangle ABC$ 内，D、E、F 分别是 BC、AC、AB 的中点，一个以 G 为圆心的圆交 DF 于 P、Q，交 EF 于 R、S，交 FD 于 T、V. 求证：$CP=CQ=AR=AS=BT=BV$.

分析　这是一个平面几何问题，如果注意到 P、Q、R、S、T、V 都是 $\odot G$ 上的点，则圆心 G 到这六个点距离都相等. 若将 $\triangle CDE$、$\triangle AEF$、$\triangle BFD$ 分别沿 DE、EF、FD 折起，使 A、B、C 三点重合于一点，则可构成一个三棱锥. 如果能证明三棱锥的顶点在底面上的射影恰好就是 G 点，便可根据斜线与射影的关系得到证明.

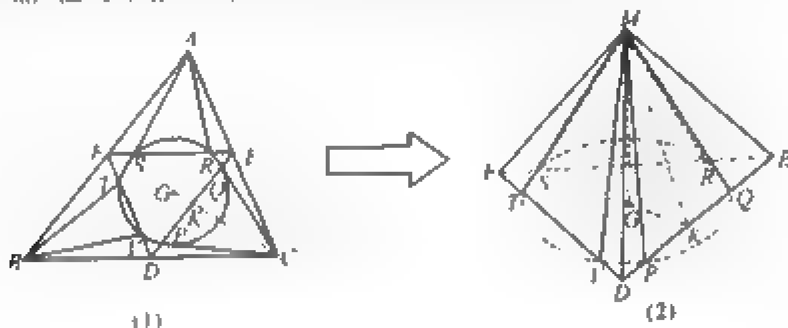


图 11-14

证明　如图 11-14(1)，由于重心 G 在 $\triangle ABC$ 内，所以 $\triangle ABC$ 为锐角三角形. 这时，将 $\triangle CDE$、$\triangle AEF$、$\triangle BFD$ 分别沿 DE、EF、FD 折叠起来，得四面体 $M-DEF$，如图 11-14(2) 所示，其中 M 就是 $\triangle ABC$ 的三个顶点的汇集点.

在图 11-14(1) 中，连接 CG 交 DE 于 K，则 $CK\perp DE$. 在折叠后的图 11-14(2) 中，仍然有 $MK\perp DE$，$GK\perp DE$，因此 $DE\perp$ 平面 MGK，于是 $MG\perp DE$. 同理可证 $MG\perp EF$，$MG\perp FD$. 所以 $MG\perp$ 底面 DEF，故 M 和 $\odot G$ 是一个直圆锥的顶点和底面.

由于圆锥的母线长相等，所以有

$$MP=MQ=MR=MS=MT=MV.$$

但在折叠过程中，有

$$MP=CP,\ MQ=CQ,\ MR=AR,$$
$$MS=AS,\ MT=BT,\ MV=BV.$$

故 $CP=CQ=AR=AS=BT=BV$.



说明 本题通过折叠，使这个看上去比较复杂的平面几何问题得到了简洁的解决.

同步检测 11

一、选择题

1. 下列各组中的三个角中，能构成一个三面角的三个面角的是……（ ）

A. $45°,65°,120°$ B. $75°,45°,90°$ C. $82°,56°,26°$ D. $130°,120°,116°$

2. 设 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点，且 $PA\perp$ 平面 ABC，则 $\angle BAC$ 与 $\angle BPC$ 的关系适合……（ ）

A. $\angle BAC>\angle BPC$　　B. $\angle BAC=\angle BPC$

C. $\angle BAC<\angle BPC$　　D. 不能确定

3. 正四面体 $ABCD$ 的棱 AB 与面 BCD 所成角的正弦值等于……（ ）

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 在三面角 $S-ABC$ 中，$\angle ASC=\angle BSC=45°$，$\angle ASB=60°$，则二面角 $A-SC-B$ 的平面角为……（ ）

A. $45°$ B. $60°$ C. $90°$ D. $120°$

5. 如图 11-15，在正方形 $SG_1G_2G_3$ 中，E、F 分别是 G_1G_2、G_2G_3 的中点，D 是 EF 的中点.现在沿 SE、SF、EF 把这个正方形折成一个四面体，使 G_1、G_2、G_3 三点重合，重合后的点记为 G.那么，在四面体 $G-SEF$ 中，必有……（ ）

A. $SG\perp$ 面 EFG B. $SD\perp$ 面 EFG

C. $GF\perp$ 面 SEF D. $GD\perp$ 面 SEF

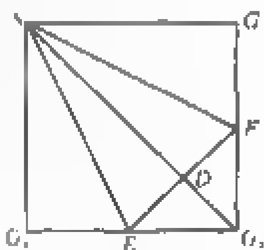


图 11-15

6. 如图 11-16，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle B=30°$，$AC=2$，M 是 AB 的中点，将 $\triangle ACM$ 沿 CM 折起，使 A、B 两点间的距离为 $2\sqrt{2}$，则此时三棱锥 $A-BCM$ 的体积等于……（ ）

A. $\frac{1}{3}$ B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$



图 11-16

7. 在长方形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=3$，沿对角线 BD 将 $\triangle ABD$ 折起到 $A'BD$ 的位置，使得点 A' 在平面 BCD 上的射影 O 恰好在线段 CD 上，则二



面角 $A'-BD-C$ 的余弦值为 …………………………………………（ ）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{9}{16}$

8. 如图11-17，在直角梯形 $SBCD$ 中，$\angle SBC=\angle BCD=90^{\circ}$，$A$ 为底边 SB 的中点，且 $AB=BC=CD=a$，将 $\triangle SAD$ 沿 AD 折起，使 $SA\perp AB$，连接 SB、SC，过点 A 作平面与 SC 垂直，分别交 SB、SC、SD 于 E、F、G，则四棱锥 $S-AEFG$ 的体积为 …………………………………………（ ）

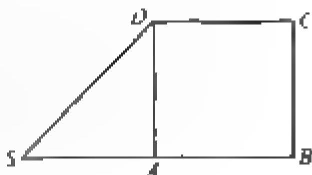


图11-17

A. $\frac{a^3}{18}$　　B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{18}$

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$　　D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$

二、填空题

9. 在三面角 $S-ABC$ 中，$\angle ASB=90^{\circ}$，$\angle BSC=60^{\circ}$，$\angle CSA=45^{\circ}$，在 SC 上一点 P，使 $SP=1$，则点 P 到平面 ASB 的距离为________.

10. 边长为2的正方形 $ABCD$ 中，E 是 AB 的中点，现将 $\triangle ADE$、$\triangle BCE$ 分别沿 CE、DE 折起，使 AE 和 BE 重合，组成一个四面体，则此四面体的体积是________.

11. 如图11-18，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，P 是面对角线 BC_1 上一动点，Q 是底面 $ABCD$ 上一动点，则 D_1P+PQ 的最小值是________.

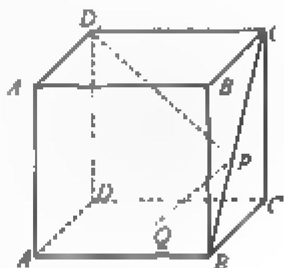


图11-18

12. 如图11-19，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB=2CD=2$，$\angle DAB=60^{\circ}$，E 为 AB 的中点，将 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCE$ 分别沿 DE、CE 折起，使 A、B 重合于 P 点，则三棱锥 $P-CDE$ 的外接球的体积为________.

13. 已知 $Rt\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高为 CD，沿 CD 将三角形折成一个直二面角 $A-CD-B$，此时 $\angle ACB$ 的余弦值为 $\frac{1}{4}$，则 $\angle ACD$ 的度数为________.

14. 二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 120°，在半平面 α 内，$AB\perp l$，垂足为 B，$AB=2$，在半平面 β 内，$CD\perp l$，垂足为 D，且 $CD=3$，若 $BD=1$，M 是棱 l 上的一个动点，则 $AM+CM$ 的最小值为________.

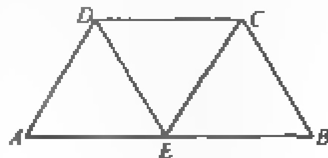


图11-19

15. 已知三棱锥 $P-ABC$ 顶点 P 处的三个面角均为 60°，三个侧面的面积分别为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，2，1，则这个三棱锥的体积是



______.

16. 如图11-19,把边长为a的正方形剪去图中的阴影部分,然后沿图中的线折成一个正三棱锥,则这个正三棱锥的体积为______.

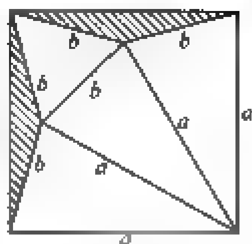


图11-19

三、解答题

17. 如果三面角有两个面互相垂直,那么垂直于任一条棱的截面都是直角三角形.

18. 设D是$\triangle ABC$的边BC上一点,把$\triangle ACD$沿AD折起,使C点所处的新位置C'在平面ABD上的射影H恰好在AB上.

(1) 求证$C'D$与平面ABD和平面AHC'所成的两个角之和不可能超过90°;

(2) 若$\angle BAC = 90^\circ$,二面角$C'-AD-H$为60°,试求$\angle BAD$的正切值.

19. 证明:若对于任意三面角$V-ABC$和过顶点V的任一直线VO,设平面AVO与BVC、平面BVO与CVA、平面CVO与BVA的交线分别为VX、VY、VZ,则$\frac{\sin\angle BVX}{\sin\angle XVC} \cdot \frac{\sin\angle CVY}{\sin\angle YVA} \cdot \frac{\sin\angle AVZ}{\sin\angle ZVB} = 1$.

20. 在四面体$S-ABC$中,$SA = BC = a$,$SB = CA = b$,$SC = AB = c$,求四面体$S-ABC$的体积.



第12讲 最值与不等式

知识点金

1. 最值问题

立体几何最值问题是高中数学竞赛中的一个热点，其求解策略主要有以下几种：

(1) 转化为函数的最值问题

有些立体几何最值问题，通过引入线参数或角参数，可以建立关于这些变量的函数关系，转化为函数的最值问题来解决.

(2) 利用重要不等式

有些立体几何最值问题，需要引入多变量建立数学模型，然后利用均值不等式或柯西不等式求其最值.

(3) 利用几何方法

对于某些空间图形的最值问题，往往需要借助于纯几何方法来解决.

2. 不等式问题

立体几何中的不等式问题以其直观、简捷的陈述和创造性的思维方法而引人入胜.下面介绍几种证明立体几何不等式的方法和技巧.

(1) 化归为平面几何问题

在证明立体几何中的不等式时，若能结合题目条件或结论的特征，寻找或者确定一个数量关系比较集中的平面，逐步将题目的其他条件向该平面转移，从而将空间不等式的问题化归为平面问题，即可迅速获证.

(2) 运用空间度量公式

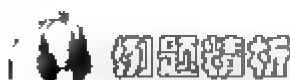
空间度量公式包括各种体公式，四面体的正弦定理、余弦定理、射影公式等.在证明空间不等式时，若能灵活运用度量公式，常会发现几何量之间的数值关系，再结合不等式



的处理使问题获证.

(3) 构造辅助图形

针对题目的特点，若能通过分割与补形等方式，构造出一种简单直观的几何体，以使空间不等式所揭示的数量关系直观化，常可使问题获得简单的证明.



例1 如图12-1，圆锥的轴截面SAB是等腰直角三角形，母线长为$2a$，P、Q分别是底面圆周上和圆内的动点，O为底面圆的圆心，且$OQ \perp PQ$，又E是母线SP的中点，F是O点在SQ上的射影.

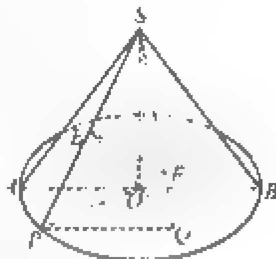


图12-1

(1) 求证：$OF \perp$平面SPQ；

(2) 求三棱锥$S—OEF$体积的最大值.

分析 第(1)小题容易证明. 对于第(2)小题，由(1)的结论知，$OF \perp$平面SEF，容易想到，将求三棱锥$S—OEF$的体积转化为求三棱锥$O—SEF$的体积. 这时，底面$\triangle SEF$的形状如何？它的面积如何求？三棱锥的高OF又如何来确定？这给我们带来了一系列不大好解决的问题. 进一步，发现题中的轴截面为等腰直角三角形这一条件还未用到. 事实上，$\triangle SOP$也是等腰直角三角形，从而$OE \perp SP$，且$OE = \frac{1}{2}SP = a$. 又由$OF \perp$平面SPQ知，$OF \perp SP$，且$OF \perp EF$，故$SP \perp$平面OEF，即$SE \perp$平面OEF. 可见，应直接求三棱锥$S—OEF$的体积，且底面$\triangle OEF$为直角三角形($\angle OFE = 90°$)，且斜边OE的长为定值，高SE亦为定值a，所以可考虑用均值不等式求体积的最大值. 当然，本题也可以选择恰当的变量，转化为函数的最值问题来解决.

解 (1) 因为F是O点在SQ上的射影，所以$OF \perp SQ$.

又$SO \perp$底面圆O，所以$PQ \perp SO$.

由题设知$PQ \perp OQ$，所以$PQ \perp$平面SOQ.

从而$PQ \perp OF$.

又$SQ \cap PQ = Q$，所以$OF \perp$平面SPQ.

(2)[方法1] 因为$\triangle SAB$是等腰直角三角形，所以$OS = OP = \sqrt{2}a$.

又E为SP的中点，所以$OE \perp SP$，且$OE = SE = a$.

由(1)知$OF \perp$平面SPQ，所以$OF \perp SP$，$OF \perp EF$.

从而$SP \perp$平面OEF，且$OF^2 + EF^2 = OE^2 = a^2$



故 $V_{S-OEF} = \frac{1}{3}S_{\triangle OEF} \cdot SE = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}OF \cdot EF \cdot a$

$$\leqslant \frac{a}{6} \cdot \frac{OF^2 + EF^2}{2} = \frac{1}{12}a^3.$$

当且仅当 $OF = EF$，即 $\triangle OFE$ 为等腰直角三角形时，上式取等号，即 V_{S-OEF} 的最大值为 $\frac{1}{12}a^3$.

［方法 2］同方法 1，得 $SE \perp$ 平面 OEF，$OF \perp EF$，且 $OE = a$

设 $\angle EOF = \theta$，则 $EF = a\sin\theta$，$OF = a\cos\theta$，有

$$V_{S-OEF} = \frac{1}{3}S_{\triangle OEF} \cdot SE = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}EF \cdot OF \cdot a$$

$$= \frac{1}{6} \cdot a\sin\theta \cdot a\cos\theta \cdot a$$

$$= \frac{1}{12}a^3\sin 2\theta \leqslant \frac{1}{12}a^3.$$

当且仅当 $\sin 2\theta = 1$，即 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时，上式取等号

故 $(V_{S-OEF})_{max} = \frac{1}{12}a^3$

评注　本题在求三棱锥 $S-OEF$ 体积的最大值时，主要应用了均值不等式和三角函数的有界性，但关键是确定三棱锥的高.

例 2　如图 12-2，四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是平行四边形，过顶点 A 和侧棱 SC 的中点 K 作一平面分别交棱 SB、SD 于点 M、N，试求 $\frac{V_{S-AMKN}}{V_{S-ABCD}}$ 的最大值和最小值.

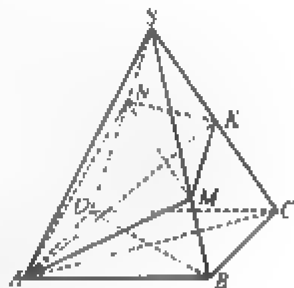


图 12-2

分析　由于是求两个四棱锥体积之比的最大值和最小值，所以可考虑引入两个参数．又因为体积比可转化为线段比，所以可考虑引入线段比作为参数，然后根据体积关系建立这两个参数的方程，从而可将一个参数用另一个参数表示，最后把这两个四棱锥体积比转化为其中一个参数的函数，通过求函数的最值来解决.

解　设 $\frac{SM}{SB} = x$，$\frac{SN}{SD} = y$，注意到 K 为 SC 的中点，则有

$$\frac{V_{S-AMK} + V_{S-ANK}}{V_{S-ABC}} = \frac{V_{S-AMN} + V_{S-MNK}}{V_{S-ABD}}$$



由此得 $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=xy+\frac{1}{2}xy$.

即 $y=\frac{x}{3x-1}$.

又 $0<y\leqslant 1$，所以 $0<\frac{x}{3x-1}\leqslant 1$.

从而 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$.

同理，$\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$.

故 $\frac{V_{S-AMKN}}{V_{S-ABCD}}=\frac{V_{S-AMK}+V_{S-AKN}}{2V_{S-ABC}}=\frac{3x^2}{4(3x-1)}$

$$=\frac{3}{4(\frac{x}{3}-\frac{1}{x^2})}=\frac{3}{-4(\frac{1}{x}-\frac{3}{2})^2+9}.$$

因此，当 $\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$，即 $x=\frac{2}{3}$ 时，$\frac{V_{S-AMKN}}{V_{S-ABCD}}$ 取得最小值 $\frac{1}{3}$；当 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=1$ 时，$\frac{V_{S-AMKN}}{V_{S-ABCD}}$ 取得最大值 $\frac{3}{8}$.

评注 本题中，我们除了引入线段比作为参数，并将两个四棱锥体积比转化为参数的函数关系外，主要应用了体积变换，这是一种值得重视的解题方法.

例3 已知一个四面体中有四条棱长均为1，求此四面体体积的最大值.

分析 解答此题有两个问题需要注意．一是另外两条棱长是相对的，还是相邻的，因此需要分两种情况讨论．二是另外两条棱长不确定，当它们变化时，将影响到四面体体积的变化，因此对于两种情况都需要求体积的极大值，这两个极大值中的最大者，便是我们所要求的最大值.

解 设另外两条棱长分别为 x、y，则有如下两种情况：

(1) 若 x、y 为相对两棱长，如图12-3.

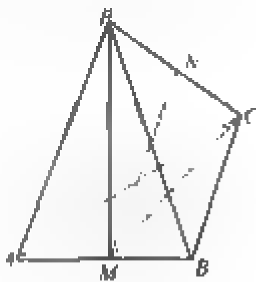


图12-3

在四面体 $P-ABC$ 中，不妨设 $PA=PB=CA=CB=1$，$AB=x$，$PC=y$，分别取 AB、PC 的中点 M、N，则 $PM\perp AB$，$CM\perp AB$，且 $PM=CM=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$.

从而 $MN\perp PC$，$AB\perp$ 平面 PCM，且 $MN=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}}$.

故 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle PMC}\cdot AB=\frac{1}{6}PC\cdot MN\cdot AB$



$$= \frac{1}{6}xy\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{x^2y^2(4-x^2-y^2)}$$

$$\leqslant \frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+4-x^2-y^2}{3}\right)^3}$$

$$= \frac{2}{27}\sqrt{3}.$$

当且仅当 $x^2 = y^2 = 4 - x^2 - y^2$，即 $x = y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时，上式取等号.

故此时 V_{P-ABC} 的极大值为 $\frac{2}{27}\sqrt{3}$.

(2) 若 x、y 为相邻两棱长，如图 12-4.

在四面体 $P-ABC$ 中，不妨设 $PA = PB = PC = BC = 1$，$AB = x$，$AC = y$，O 为点 P 在底面 $\triangle ABC$ 上的射影，则 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，记 $\angle BAC = \alpha$，则有

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2OA，即 OA = \frac{1}{2\sin\alpha}.$$

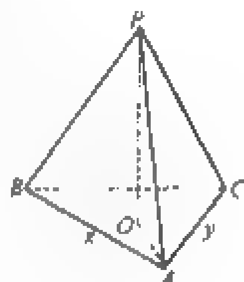


图 12-4

因此，$PO = \sqrt{PA^2 - OA^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\alpha}}$.

从而 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PO$

$$= \frac{1}{6}xy\sin\alpha\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\alpha}}$$

$$= \frac{1}{6}xy\sqrt{\sin^2\alpha-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{6}xy\sqrt{\frac{3}{4}-\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{6}xy\sqrt{\frac{3}{4}-\left(\frac{x^2+y^2-1}{2xy}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{3x^2y^2-(x^2+y^2-1)^2}$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{-\left(x^2-\frac{y^2+2}{2}\right)^2-\frac{3}{4}(y^2-2)^2+3}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{3}}{12}.$$



当且仅当 $x=\frac{y^2+2}{2}$，且 $y^2=2$，即 $x=y=\sqrt{2}$ 时，上式取等号.

故此时 V_{P-ABC} 的极大值为 $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

综合(1)、(2)知，三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{12}$

评注　对于第(1)种情况，我们通过作棱 AB 或 PC 的中垂面，利用分割法建立了体积关于 x、y 的函数关系，容易想到用二元均值不等式求其最大值. 但是，对于第(2)种情况就比较复杂，还需引入角参数，在表示出高 PO 后，又由余弦定理消去了这个角参数，最后建立了体积关于 x、y 的函数关系. 由于这个函数表达式比较复杂，不易直接应用均值不等式，我们又回到了最基本的配方法，运算量较大.

例4　设四棱锥 $M-ABCD$ 的底面是正方形，且 $MA=MD$，$MA\perp AB$，如果 $\triangle AMD$ 的面积为1，试求能放入这个四棱锥的最大球的半径.

分析　由四棱锥和球的形体结构知，应放入的球需与四棱的底面和其中的两个侧面相切. 至于如何求最大球的半径，我们可类比平面几何知识，利用体积法求之.

解　如图，因为 $AB\perp AD$，$AB\perp AM$，所以 $AB\perp$ 平面 MAD.

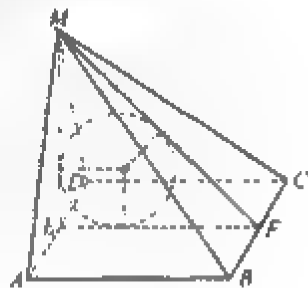


图12-5

过顶点 M 作截面 MEF 垂直于 AD，分别交 AD、BC 于 E、F，由 $MA=MD$ 知，E、F 分别 AD、BC 的中点，则 $EF\parallel AB$，从而 $EF\perp$ 平面 MAD. 因此，$\triangle MEF$ 为直角三角形，由题设得

$$\frac{1}{2}EF\cdot ME=\frac{1}{2}AD\cdot ME=1.$$

易知，当 $EM=ME$ 时，$\triangle MEF$ 有最大的内切圆. 此进，$EF=ME=\sqrt{2}$，$MF=2$，内切圆半径为

$$r=\frac{1}{2}(ME+EF-MF)=\sqrt{2}-1.$$

设圆心 O 到侧面 MAB、MDC 的距离为 d，则

$$V_{M-ABCD}=\frac{1}{3}(S_{\triangle MAD}+S_{ABCD}+S_{\triangle MBC})\cdot r+\frac{2}{3}S_{\triangle MAB}\cdot d$$

因为 $V_{M-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot ME=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

$S_{\triangle MAD}=\frac{1}{2}AD\cdot ME=1$，$S_{ABCD}=2$，$S_{\triangle MBC}=\sqrt{2}$，$S_{\triangle MAB}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$r=\sqrt{2}-1$，

于是，$\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}(3+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)+\frac{\sqrt{5}}{3}d$，

即 $2\sqrt{2}=(3+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)+\sqrt{5}d$.

解得 $d=\frac{\sqrt{5}}{5}>\sqrt{2}-1=r$.

故以 O 为球心，$\sqrt{2}-1$ 为半径的球为能放入此棱锥的最大球.

评注 在求出 Rt△MEF 的内切圆的半径后，还不能断定它就是放入棱锥最大球的半径，还需要证明圆心 O 到另外两个侧面 MAB 和 MCD 的距离不小于这个半径. 否则，这个球过大将无法装入.

例 5 （第 9 届 IMO 试题）若一个四面体恰有一条棱的长大于 1，求证，这个四面体的体积 $V\leqslant\frac{1}{8}$.

分析 可考虑引入线段参数或角参数，利用不等变换建立关于四面体体积的不等式，然后通过适当的放缩，证明 $V\leqslant\frac{1}{8}$.

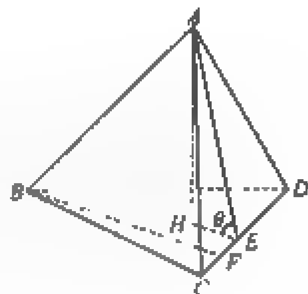


图 12-6

证法 1 如图 12-6，在四面体 $ABCD$ 中，不妨设 AB 是最长的棱，即 $AB>1$，则 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 的边长都不大于 1.

过点 A 作 $AH\perp$ 平面 BCD，垂足为 H，再作 $HE\perp BC$，$BF\perp CD$，垂足分别为 E、F，连接 AE，则 $AE\perp BC$. 设 $BC=x$，则四面体 $ABCD$ 的体积为

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AH=\frac{1}{6}x\cdot BF\cdot AH$$

$$\leqslant\frac{1}{6}x\cdot BF\cdot AE.$$

因为 CE 和 DE 中至少有一个不小于 $\frac{x}{2}$，且 $AC\leqslant1$，$AD\leqslant1$，所以

$$AE\leqslant\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}.$$

同理，$BF\leqslant\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$.

于是，

$$V\leqslant\frac{1}{6}x\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}x\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{24}x(4-x^2).$$

当 x 在 $(0,1]$ 内变化时，有



$$x(4-x^2)=3-(1-x)-(2+x)(1-x)^2\leqslant 3.$$

故当 $x=1$ 时,$x(4-x^2)$ 取最大值 3,因此

$$V\leqslant\frac{1}{24}\times 3=\frac{1}{8}.$$

证法 2 如图 12-6,设 $\angle AEH=\theta$,则四面体 $ABCD$ 的体积为

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AH=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AE\sin\theta.$$

(1) 当 $AE\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,由于 $\triangle BCD$ 各边长都不大于 1,所以以边长为 1 的等边三角形面积为最大,因此

$$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}CD\cdot BF\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

故 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AE\sin\theta\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1=\frac{1}{8}$

(2) 当 $AE>\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,注意到 $S_{\triangle BCD}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$,而 $AE>\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $CD<1$

又因为在各边长不大于 1 的同底三角形中,以腰长为 1 的等腰三角形的面积最大,且高也最大,因此只须考虑当 $CD<1$,$AC=AD=BC=BD=1$ 时,该四面体的体积是否超过 $\frac{1}{8}$。

设 $\angle ACD=\alpha>60^\circ$,则 $AF=\sin\alpha$,$CD=2\cos\alpha$. 从而

$$S_{\triangle ACD}=S_{\triangle BCD}=\sin\alpha\cos\alpha.$$

故 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AF\sin\theta\leqslant\frac{1}{3}\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha$

$$=\frac{1}{6}\sin2\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{1}{12}(\cos\alpha-\cos3\alpha)$$

$$<\frac{1}{12}(\cos60^\circ-\cos180^\circ)\ (\text{因为 }180^\circ<3\alpha<270^\circ)$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{8}.$$

综合(1)、(2)知,$V\leqslant\frac{1}{8}$.

例 6 正四棱锥内接于半径为 R 的球且外切于半径为 r 的球,求证 $\frac{R}{r}\geqslant\sqrt{2}+1$.

分析 由于正四棱锥的高和底面边长都在变,因此可选择另外一个参数,将正四棱锥的高和底面边长用这个参数来表示,从而 R 和 r 也都可以用这个参数来表示. 为了计算



上的方便，可选择侧面与底面所成的角为参数.

证明　如图12-7，设正四棱锥$S-ABCD$的底面边长为a，底面正方形的中心为O，它的外接球球心为O_1、内切球球心为O_2，由对称性知，O_1、O_2必在SO上，且$SO\perp$底面$ABCD$.

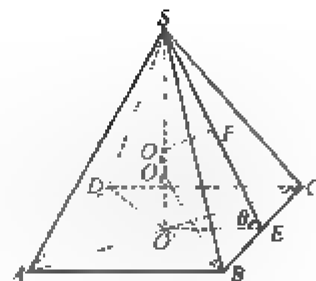


图12-7

作$O_2F\perp$侧面SBC，垂足为F，连接SF并延长交BC于E，则E为BC的中点，且$SE\perp BC$.

设$SO=h$，$\angle SEO=\theta$，易知$r=O_2F=O_2O=\frac{a}{2}\tan\frac{\theta}{2}$，$O_1O=h-R$，$OB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

在$\mathrm{Rt}\triangle O_1OB$中，由$O_1B^2=O_1O^2+OB^2$，得

$$R^2=(h-R)^2+\frac{1}{2}a^2$$

解得$R=\frac{2h^2+a^2}{4h}$.

在$\mathrm{Rt}\triangle SOE$中，$h=SO=\frac{a}{2}\tan\theta$，所以

$$R=\frac{a(\tan^2\theta+2)}{4\tan\theta}$$

令$\tan^2\frac{\theta}{2}=t$，则

$y=\frac{R}{r}=\frac{\tan^2\theta+2}{2\tan\theta}\cdot\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{1+t^2}{2t(1-t)}$，

即$(2y+1)t^2-2yt+1=0$.

因为$t\in R$，且$2y+1\neq 0$，所以

$\Delta=4y^2-4(2y+1)\geqslant 0$.

注意到$y>0$，解得$y\geqslant\sqrt{2}+1$.

故$\frac{R}{r}\geqslant\sqrt{2}+1$

评注　本题通过引入角参数，从而可将正四棱锥中的基本量都用这个角的三角函数表示，然后利用勾股定理建立了这些基本量之间的关系。最后为了求$y=\frac{R}{r}$的取值范围，我们又运用了判别式法

例7　已知三棱锥$P-ABC$的三个侧面均为正三角形，过它的高PH作一平面与三侧面所在平面交于三条直线，这三条直线与底面ABC所成的角分别为α、β、γ，求证



$$\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geqslant\frac{3}{4}.$$

分析 容易作出三条交线与底面 ABC 所成的角，通过直角三角形中的边角关系，可将 $\cot\alpha$、$\cot\beta$、$\cot\gamma$ 分别用线段比来表示，从而问题可转化为线段比的不等式来证明. 如何证明这个线段比的不等式?我们需要根据它的结构特点，进一步确定解题的思考方向.

证明 由题设知，$P-ABC$ 为正四面体.

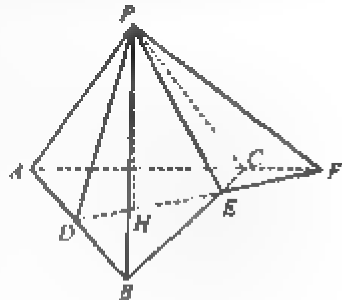


图 12-8

如图 12-8，设 PD、PE、PF 是过高线 PH 的平面与三个侧面 PAB、PBC、PCA 所在平面的交线，则 $\angle PDH=\alpha$，$\angle PEH=\beta$，$\angle PFH=\gamma$. 从而 $\tan\alpha=\frac{PH}{DH}$，$\tan\beta=\frac{PH}{EH}$，$\tan\gamma=\frac{PH}{FH}$.

设正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 1，则 $PH=\frac{\sqrt{3}}{6}$

在平面 ABC 内，从点 H 分别向三边 AB、BC、CA 作垂线，记 DH、EF、FH 与相应的垂线的夹角分别为 x，y，z，则 $DH=\frac{\sqrt{3}}{6\cos x}$，$EH=\frac{\sqrt{3}}{6\cos y}$，$FH=\frac{\sqrt{3}}{6\cos z}$.

因为 $x+y=\frac{\pi}{3}$，$y+z=\frac{2\pi}{3}$，即 $y=\frac{\pi}{3}-x$，$z=\frac{\pi}{3}+x$，所以

$$\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma$$

$$=PH\left(\frac{1}{DH^2}+\frac{1}{EH^2}+\frac{1}{FH^2}\right)$$

$$=8\left[\cos^2x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right]$$

$$=4\left[3+\cos2x+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)\right]$$

$$=4\left[3+\cos2x+2\cos\frac{2\pi}{3}\cos2x\right]=12.$$

故由柯西不等式，得

$$(\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma)(\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma)\geqslant9,$$

即 $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geqslant\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$.

评注 这是一个立体几何与三角的综合题，将角的三角函数关系转化为线段比的关系，这是证明三角不等式的一种常用方法. 在本题的证明过程中，我们还用到了一个重要的三角恒等式 $\cos^2\theta+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=\frac{3}{2}$.

例 8 （第 12 届 IMO 试题）在四面体 $ABCD$ 中，$\angle BDC=90°$，由点 D 到 $\triangle ABC$ 所



在的平面的垂线的垂足 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心.证明:

$$(AB+BC+CA)^2 \leqslant 6(DA^2+DB^2+DC^2).$$

并指出对于哪一种四面体,上面的等号成立.

分析 由欲证不等式的特点,我们联想到柯西不等式.但仔细观察,离应用柯西不等式还有很大差距,所以可先从确定四面体 $ABCD$ 的特征入手.

证法1 首先证明顶点 D 处的三个面角均为直角.

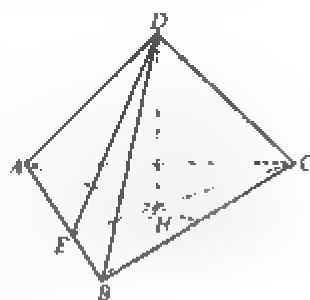


图 12-9

如图 12-9,因为 $\angle BDC=90°$,平面 $CDH\perp$ 平面 ABC,故 $AB\perp$ 平面 CDH,从而 $AB\perp DE$.其中,E 为 CH 的延长线与 AB 的交点.

记四面体各棱的长分别为 $BC=a, CA=b, AB=c, DA=p, DB=q, DC=r$.

在 $Rt\triangle DEB$ 和 $Rt\triangle CEB$ 中,有

$DE^2+EB^2=DB^2=q^2$ ①

$CE^2+EB^2=BC^2=a^2=q^2+r^2$ ②

② − ① 得 $CE^2-DE^2=r^2$,即 $r^2+DE^2=CE^2$.

根据勾股定理的逆定理,得 $CD\perp DE$.

又 $CD\perp BD$,所以 $CD\perp$ 平面 DAB,则 $CD\perp AD$,则 $\angle ADC=90°$.

对于平面 DHB,同理可得 $\angle ADB=90°$.

故顶点 D 处的三个面角均为直角,且有

$q^2+r^2=a^2, r^2+p^2=b^2, p^2+q^2=c^2$.

因此,$a^2+b^2+c^2=2(p^2+q^2+r^2)$ ③

于是,只需证 $(a+b+c)^2\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$ ④

④ 与 ③ 结合起来,便可得所要证的不等式

$$(a+b+c)^2\leqslant 6(p^2+q^2+r^2).$$

由柯西不等式知,④ 式显然成立.

当且仅当 $a=b=c$ 时,④ 式中的等号成立.

故当 $\triangle ABC$ 为正三角形,且顶点 D 处的三个面角均为直角时,这样四面体可使不等式 $(AB+BC+CA)^2\leqslant 6(DA^2+DB^2+DC^2)$ 中的等号成立.

证法2 在以 H 为原点的坐标系中,把点 A、B、C 的位置向量分别记作 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$.根据题设条件,得

$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{D})\cdot(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D})=0$; ①

$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=0, \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})=0,$

$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=0$; ②



$A\cdot D=B\cdot D=C\cdot D=0$ ③

由①、③得 $B\cdot C+D\cdot D=0$. ④

由②得 $A\cdot B=A\cdot C=B\cdot C$ ⑤

由④、⑤得 $A\cdot B+D\cdot D=0, A\cdot C+D\cdot D=0$. ⑥

于是，由③还有

$$(A-D)\cdot(B-D)=0,(A-D)\cdot(C-D)=0$$

故 $\angle ADB=90^\circ, \angle ADC=90^\circ$.

以下的证明与证法1相同



思考题1 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，试求正方体上底面 $ABCD$ 的内切圆周上的点 P 与过顶点 $A、B、C_1、D_1$ 的圆周上的点 Q 之间的最小距离

分析 正方体上底面 $ABCD$ 的内切圆半径和过顶点 $A、B、C_1、D_1$ 的圆的半径都是确定的，若 O 为过 $A、B、C_1、D_1$ 四点的圆的圆心，我们可考察 $\triangle OPQ$，利用三边的不等关系即可求出 PQ 的最小值 另外，我们不难看出，正方体上底面的内切圆实际上是正方体的棱切球与上底面 $ABCD$ 的交线，过 $A、B、C_1、D_1$ 四点的圆实质上是正方体外接球的一个大圆，并且这两个球是同心球，所以也可以考虑用几何变换的方法来解决此题

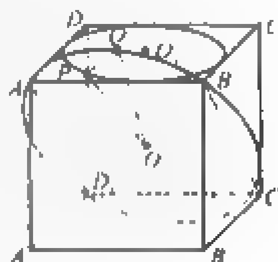


图 12-10

解法1 如图 12-10，$\angle POQ=\theta$，其中 O 为长方形 ABC_1D_1 外接圆的圆心（也是正方体的中心），显然 $OQ=\frac{\sqrt{3}}{2}, OP=\frac{\sqrt{2}}{2}$

在 $\triangle POQ$ 中，由三边的不等关系，得

$$PQ\geqslant OQ-OP=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

当且仅当 $\theta=0^\circ$ 时，上面的等号成立

由于平面 ABC_1D_1 必与上底面正方形 $ABCD$ 的内切圆 $\odot O_1$ 相交于棱 AB 的中点 P_0，设射线 OP_0 与长方形 ABC_1D_1 的外接圆 $\odot O$ 相交于点 Q_0，而 P_0 在线段 OQ_0 的内部，这时 $\theta=0^\circ$

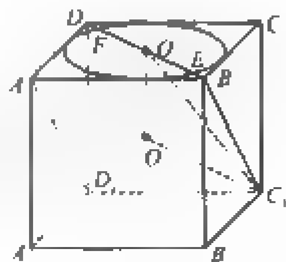


图 12-11

故当 $\theta=0^\circ$ 时，$d_{\min}=P_0Q_0=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$



解法 2 如图 12-11，正方体上底面 $ABCD$ 的内切圆 O_1 是正方体的棱切球面（与各棱都相切的球）与上底面的交线，这个球的半径 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$；过 A、B、C_1、D_1 四点的圆 O 是正方体的外接球面与对角面 ABC_1D_1 所在平面的交线，这个球的半径 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，且它们是同心球（球心均为 O）。显然，点 P、Q 分别在小球面和大球面上。

考察以 O 为位似中心、$\sqrt{\frac{3}{2}}$ 为位似比的变换下，小球面变为大球面，而小球面上的圆周的象集为大球面上的圆周。

注意到 $ABCD$ 的内切圆 $\odot O_1$ 与线段 BD 的交点 E、F 在该位似变换下的象均在平面 ABC_1D_1 的同侧，所以射线 OE、OF 都不与平面 ABC_1D_1 相交，而 $\odot O_1$ 与 $\odot O$ 所在平面仅有一个公共点 P_0（棱 AB 的中点），且射线 OP_0 与大圆 $\odot O$ 只有一个交点 Q_0，所以 P_0、Q_0 之间的距离就是我们所考察的 $\odot O_1$ 与 $\odot O$ 上的点之间的距离的最小值，其值为 $d=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$。

评注 解法 2 虽然复杂了一些，但它却为我们提供了用几何变换解答此题的一种方法。

思考题 2 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，A_1 所对的 $\triangle A_2A_3A_4$ 的面积为 S_1，以 A_1A_2 为棱的二面角为 α_{12}，余类推。求证：

$$\sum_{1\le i<j\le 4}\cos^2\alpha_{ij}\geqslant\frac{2}{3}.$$

分析 为了寻求其证明方法，先联想到平面上类似问题的证明：在 $\triangle ABC$ 中，求证：$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C\geqslant\frac{3}{4}$。此题可以通过三角形的射影定理结合柯西不等式获证。将此证法推广到空间即可得本题的证明。

证明 由面积射影定理，得

$$S_1=S_2\cos\alpha_{34}+S_3\cos\alpha_{24}+S_4\cos\alpha_{23}.$$

根据柯西不等式，有

$$\begin{aligned}S_1^2&=(S_2\cos\alpha_{34}+S_3\cos\alpha_{24}+S_4\cos\alpha_{23})^2\\&\leqslant(S_2^2+S_3^2+S_4^2)(\cos^2\alpha_{34}+\cos^2\alpha_{24}+\cos^2\alpha_{23}).\end{aligned}$$

因此，$\cos^2\alpha_{34}+\cos^2\alpha_{24}+\cos^2\alpha_{23}\geqslant\frac{S_1^2}{S_2^2+S_3^2+S_4^2}$。

同理，$\cos^2\alpha_{14}+\cos^2\alpha_{34}+\cos^2\alpha_{13}\geqslant\frac{S_2^2}{S_1^2+S_3^2+S_4^2}$，

$\cos^2\alpha_{12}+\cos^2\alpha_{24}+\cos^2\alpha_{14}\geqslant\frac{S_3^2}{S_1^2+S_2^2+S_4^2}$，



$$\cos^2\alpha_{23}+\cos^2\alpha_{13}+\cos^2\alpha_{12}\geqslant\frac{S_4^2}{S_1^2+S_2^2+S_3^2}$$

相加,得 $2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos^2\alpha_{ij}\geqslant\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{S_i^2}{S^2-S_i^2}$,

其中 $S^2=\sum\limits_{i=1}^{4}S_i^2$.

记 $x_i=\frac{S_i^2}{S^2}(i=1,2,3,4)$,则 $x_1+x_2+x_3+x_4=1$.

从而 $2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\cos^2\alpha_{ij}\geqslant\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{S_i^2}{S^2-S_i^2}=\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{x_i}{1-x_i}=-4+\sum\limits_{i=1}^{4}\left(\frac{x_i}{1-x_i}+1\right)$

$=-4+(x_1+x_2+x_3+x_4)\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{1-x_i}$

$=-4+\frac{1}{3}\left[\sum\limits_{i=1}^{4}(1-x_i)\right]\cdot\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{1-x_i}$

$\geqslant-4+\frac{1}{3}\times4^2=\frac{4}{3}$.

故 $\sum\cos^2\alpha_{ij}\geqslant\frac{2}{3}$.

评注　(Ⅰ)题设中四面体各面的面积 $S_i(i=1,2,3,4)$ 是一个多余的条件;(Ⅱ)证明本题的关键是应用面积射影定理建立各二面角的余弦函数与各面面积的等量关系.

同步检测12

一、选择题

1. 把四个半径均为1的小球装入一个大球内,则此大球半径的最小值为 …… (　　)

A. $1+\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $2+\sqrt{6}$　　D. $1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2. 若一个四面体的六条棱中,有五条棱的长都是 a,则该四面体的体积的最大值是 …… (　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^3$　　C. $\frac{1}{12}a^3$　　D. $\frac{1}{8}a^3$

3. 在边长为 a 的菱形 $ABCD$ 中,有一个内角为 $60°$,将这个菱形沿对角线 AC 折成的二面角为 θ,若 $\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$,则折叠后 AC 与 BD 距离的最大值为 …… (　　)



A. $\frac{3}{2}a$ B. $\frac{3}{4}a$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}a$

4. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=a$，$AB=b$，$AD=c$，且 $a<b<c$，则从点 A 出发沿长方体表面到达 C_1 点的最短距离是 …… ( )

A. $\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$ B. $\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ca}$

C. $\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab}$ D. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

5. 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的高为2，底面边长为 $\sqrt{2}$，点 P、Q 分别在线 BD、SC 上，则 P、Q 两点间的最短距离为 …… ( )

A. 1 B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

6. (2011年全国高中数学联赛试题)如图12-12，顶点为 P 的圆锥的轴截面是等腰直角三角形，A 是底面圆周上的点，B 是底面圆内的点，O 为底面圆的圆心，$AB\perp OB$，垂足为 B，$OH\perp PB$，垂足为 H，且 $PA=4$，C 为 PA 的中点．当三棱锥 $O-PHC$ 的体积最大时，OB 的长为 …… ( )

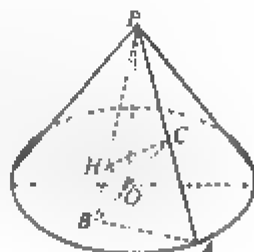


图 12-12

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

7. 已知四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$BC=DA$，$AC=BD$，侧面 ABC、侧面 ACD、侧面 ABD 与底面 BCD 所成的三个锐角分别为 α、β、γ，则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$ …… ( )

A. 取值为常数 $\frac{1}{3}$ B. 有最大值 $\frac{1}{3}$ C. 有最小值 $\frac{1}{3}$ D. 不可能取值 $\frac{1}{3}$

8. 有一容积为1的正方体容器 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，在棱 AB、BB_1、面对角线 BC_1 的中点处各有一小孔 E、F、G．若此容器可以任意放置，则其可装水的最大容积为 …… ( )

A. $\frac{1}{2}$ 立方单位 B. $\frac{7}{8}$ 立方单位

C. $\frac{11}{12}$ 立方单位 D. $\frac{7}{48}$ 立方单位

二、填空题

9. 设 P、Q 是正四棱锥 $S-ABCD$ 内的两个点，四棱锥的底面边长为 a，侧棱长为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$，则 $\angle PSQ$ 的取值范围是 ______



10. 长方体的底面积是4，对角线长也是4，则长方体的侧面积的最大值是________.

11. 四面体 $ABCD$ 的棱长为 a，在它的表面上任意地放上 n 个点，若其中至少有两个点的距离不大于 $\frac{a}{2}$，则 n 的最小值为________.

12. 若圆柱的体积与表面积在数值上恰好相等，则该圆柱的体积的最小可能值是________.

13. 四面体 $P-ABC$ 中，$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90^\circ$，面 PAC、PBC、PAB 与面 ABC 所成的二面角分别为 α、β、γ，给出如下三个不等式：

①$\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha\geqslant\frac{3}{2}$；

②$\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\geqslant 6$；

③$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leqslant\frac{1}{2}$.

其中正确的不等式的序号是________.（把你认为正确的序号都填上）

14. （2000年上海市高中数学竞赛试题）在四面体 $ABCD$ 中，$AD=DB=BC=CA=1$，则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值是________.

15. 如图12-13是一块长与宽分别为 $3a$ 和 $2a$ 的矩形镀锌铁皮，现用这块铁皮制作一个有底有盖的圆柱形罐头盒，并按图所示的方式裁剪铁皮，在不考虑裁剪与焊接所需损耗的情况下，这个罐头盒的最大体积是________.

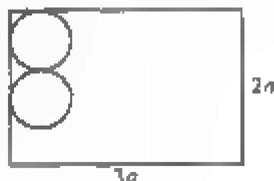


图12-13

16. 同底的两个正三棱锥内接于半径为 R 的球，它们的侧面与底面所成的角分别为 α、β，则 $\alpha+\beta$ 的最大值是________.

三、解答题

17. 在四面体 $PABC$ 中，$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90^\circ$，若它的六条棱长之和为 S，试求它的体积的最大值.

18. （2004年湖南省高中数学竞赛试题）已知三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱 PA、PB、PC 两两垂直，O 是底面 $\triangle ABC$ 内的任意一点，PO 与三个侧面所成的角分别为 α、β、γ，求证：

$$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta+\gamma\leqslant 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

19. 在四面体 $ABCD$ 中，顶点 A、B、C、D 到对面的距离分别为 h_1、h_2、h_3、h_4，四面体内切球的半径为 r，求证：$h_1+h_2+h_3+h_4\geqslant 16r$.

20. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$BC=a$，$CA=b$，点 P 在边 AB 上，沿 PC 把 $\triangle ABC$ 折成四面体 $PABC$，试求该四面体体积的最大值.



第13讲　立体几何中的计数问题

知识点金

立体几何中的计数问题，既可以考查学生的空间想像能力，还可以考查学生对基本的计数原理、方法、技巧的掌握情况，具有较强的综合性，因此备受竞赛命题者的青睐．

解答立体几何中的计数问题，首先需要掌握空间中点、线、面的位置关系，要善于进行等价转化，从整体着眼．其次就是要灵活运用分类计数原理和分步计数原理，排列组合的方法以及递推的思想．

例题精析

例1　（第15届希望杯数学邀请赛试题）如果一条直线上有某个正方体内部的点，就称这条直线穿过这个正方体．既用 $n^3(n\in \mathbf{N},n\geq 2)$ 个棱长为1的小正方体堆成一个棱长为 n 的大正方体，那么一条直线能穿过的小正方体的个数最多有……（　）

A. $3n-2$ 个　　B. $3n-1$ 个　　C. $3n+1$ 个　　D. $2n-1$ 个

分析　可从特殊情形入手进行探索．例如，当 $n=2$ 时，相当于将棱长为2的正方体切3刀，得到 2^3 个小正方体，这时在大正方体内部形成了3个平面．要使直线穿过的小正方体最多，就必须使这条直线与大正方体中形成的3个平面都尽可能地相交，这是可以办得到的．于是，这条直线在大正方体内部被3个平面分成 $3+1=4$ 部分，因此直线最多穿过4个小正方体．对于任意的正整数 $n(n\geq 2)$，这种规律都存在，从而我们便找到了解答本题的思路．

解　除去大正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的6个面，其他小正方体构成了 $3(n-1)$ 个



平面(在大正方体内部),这些平面最多与直线有$3(n-1)$个交点,它们在大正方体内部把直线分为$3(n-1)+1$部分,因此直线最多穿过$(3n-2)$个小正方体.

另一方面,在大正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱AB上取靠近于A的点M,在棱C_1D_1上取靠近于C_1的点N,则直线穿过$(3n-2)$个小正方体,故应选A.

评注 上述解题过程经历了两个步骤:一是通过对图形的分析,首先证明直线穿过小正方体的个数不大于$3n-2$;二是通过构造直线MN,说明$3n-2$是可以达到的.这也是解答离散型问题的一种常用的方法.

例2 (2002年全国高中数学联赛试题)如图13-1,点$P_1,P_2,\cdots,P_{10}$分别是四面体的顶点或棱的中点,那么在同一平面上的四点组(P_1,P_i,P_j,P_k)共有________个.

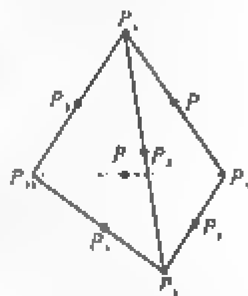


图13-1

解 可按含有P_1的四点组是否在同一侧面上分为如下两类:

(1)在某一侧面上,除了P_1点外尚有5个点,其中任意三点都与P_1点共面,所以这个侧面上与P_1点共面的三点组有C_5^3个.因为含P_1点的侧面有3个,所以这样的四点组共有$3C_5^3$个.

(2)含P_1点的某一条侧棱上的三点和底面上与这条侧棱异面的那条棱的中点组成的四点共面.因为含有P_1点的侧棱有3条,所以这样的四点组共有3个.

综合(1)、(2),由分类计数原理知,满足条件的四点组(P_1,P_i,P_j,P_k)共有$3C_5^3+3=33$(个).

评注 本题实质上是1997年全国高考文科数学试题中的最后一道选择题.如果去掉必须含有P_1点这一限制,即从$P_1,P_2,\cdots,P_{10}$这10个点中取出一个四点组,求其中共面的四点组的个数.这就需要分为三类,不难求得共有$4C_6^4+6+3=69$(个)共面的四点组.

例3 在正方体的8个顶点中,每两点连成一条直线,其中异面直线共有多少对?(两条算作一对)

分析 一种想法是先求出两两连线的条数,有$C_8^2=28$条直线,再算出两条一对共有$C_{28}^2=378$对,这当中有共面的需要减去.而共面又有两种情况:相交与平行.另一种想法是从四面体入手,因为每一个四面体的三组对棱分别成异面直线,因此只须计算以正方体的顶点为顶点可以组成多少个四面体即可.

解法1 正方体的8个顶点可连成$C_8^2=28$条直线,每两条为一对,共有$C_{28}^2=378$对直线.其中,每一顶点可引出7条线,并组成$C_7^2=21$对相交直线,8个顶点有$8\times21=168$对相交直线,又每一条棱都可以与3条棱组成平行四边形,每一个平行四边形中有两对平行直线并新增加了一对相交的对角线,12条棱共有$12\times3=36$对共面直线



故异面直线共有 378 − 168 − 36 = 174(对).

解法 2 从正方体的 8 个顶点中任取 4 个，有 C_8^4 种取法，其中四点共面的有 12 种(6 个表面和 6 个对角面). 将不共面的四点构成一个四面体，共有 $C_8^4 - 12$ 个四面体. 又每个四面体确定了 3 对异面直线，因此异面直线共有 $3(C_8^4 - 12) = 174$(对).

评注 解法 1 应用了淘汰法，即从所有直线对中减去两类共面的直线对，这是一种常规思路. 解法 2 运用了转化的思想和对应的计数方法，即将一个不易处理的新问题，转化为容易解决的老问题；将一种规律不甚明显的计算转化为一种明确的计算. 由此，启发我们在处理这类计数问题时，首先要进行几何结构的分析，然后进行精巧的构造，使问题得到整体解决.

例 4 从正方体的 8 个顶点中任取 4 个不在同一平面上的四个顶点 P、Q、M、N，组成一个二面角 $P-QM-N$，那么，这样的二面角的大小的不同可能值共有多少个？

分析 问题的关键是确定二面角的棱. 正方体任意两个顶点的连线可分为三类. 一类是正方体的棱，另一类是正方体的面对角线，还有一类是正方体的体对角线. 所以，本题可按上述三种情况分类，然后分别考察所构成二面角的大小.

解 考察正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，按二面角的棱可分为如下三种情况.

(1) 以正方体的棱为二面角的棱(不妨设 AB 是二面角的棱)，则共有两种本质不同的二面角. 一种是正方体相邻两个面构成的二面角，如 A_1-AB-C，它的大小为 $\frac{\pi}{2}$；另一种是正方体的一个表面与一个和它有公共边的对角面构成的二面角，它的大小为 $\frac{\pi}{4}$.

(2) 以正方体的面对角线为二面角的棱(不妨设 BC_1 是二面角的棱)，则共有五种本质不同的二面角：①$A_1-BC_1-B_1$，它的大小为 $\arctan\sqrt{2}$；②B_1-BC_1-A，它的大小为 $\frac{\pi}{2}$；③$A-BC_1-D$，它的大小为 $\arccos\frac{1}{3}$；④B_1-BC_1-D，它的大小为 $\pi-\arctan\sqrt{2}$；⑤$A-BC_1-D_1$，它的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(3) 以正方体的体对角线为二面角的棱(不妨设 AC_1 是二面角的棱)，则共有两种本质不同的二面角，如 A_1-AC_1-D 和 $A_1-AC_1-D_1$，它们的大小分别为 $\frac{2\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{3}$.

综上所述，所求二面角的大小共有 8 个不同的值.

评注 这是一道有关正方体中二面角的计数和二面角大小的计算问题，把正方体中有关二面角的基本问题作了全面的考查，是一道难得的综合题.

例 5 求证：存在两两异面的四条直线，使得没有任何直线能与这四条直线同时相交.



分析 一个直接的思路，就是在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，与 AB、A_1C、D_1D 同时相交的直线必与 B_1C_1 成异面直线. 下面介绍一个简捷的间接证明.

证明 反证法.

取正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，于是，直线 AB、A_1C、D_1D、B_1C_1 两两成异面直线，如图13-2.

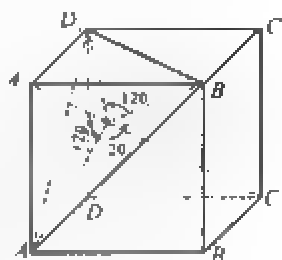


图 13-2

假设存在一条直线 l 与直线 AB、A_1C、D_1D、B_1C_1 分别交于点 E、F、G、H.

现将整个图形绕 A_1C 旋转 120°(如图13-2所示). 由于 $A_1C\perp$ 平面 AB_1D_1 且通过正 $\triangle AB_1D_1$ 的中心，故点 $A\to B_1$，点 $B_1\to D_1$，点 $D_1\to A$. 同样，点 $B\to C_1$，点 $C_1\to D$，点 $D\to B$. 从而，直线 $AB\to B_1C_1$，直线 $B_1C_1\to D_1D$，直线 $D_1D\to AB$，直线 A_1C 未发生变化. 空间中四条直线所占的位置没有发生任何变化，只是字母循环换了一圈记号，如图13-3.

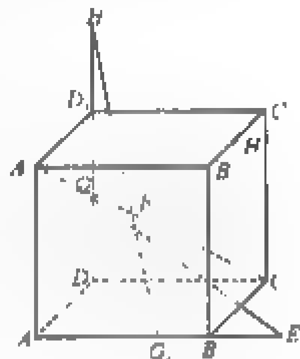


图 13-3

空间中过点 F 的直线 l 绕 A_1C 旋转 120° 后，除点 F 外均不与直线 l 重合，记为 l_1. 进而，点 G 在 AB 上的新位置 G_1 不与点 E 重合，否则，由两点确定一条直线知 $l(FE)$ 与 $l_1(FG_1)$ 重合. 同样，点 H 在 D_1D 上的新位置 H_1 与点 G 不重合. 于是，相交于点 F 的共面直线 l、l_1 与 AB 相交于点 E、G_1，与 D_1D 相交于点 G、H_1. 因此，E、G_1、G、H_1 四点共面，即 AB 与 D_1D 共面. 这与 AB、D_1D 成异面直线矛盾.

故与直线 AB、A_1C、D_1D、B_1C_1 均相交的直线 l 不存在.

评注 题设条件是一个存在性问题，所以容易联想到正方体中两两异面的四条直线，所以我们应用了正方体这个基本图形. 而题目的结论又是一个不存在性问题，所以也容易想到应用反证法. 问题的关键是如何推出矛盾，这里我们应用了旋转变换，实属创新，读者应认真体会.

例6 一个凸多面体的表面由12个正方形、8个正六边形、6个正八边形组成，在每个顶点处一个正方形、一个正六边形、一个正八边形相交. 在连接多面体的顶点的线段中，有多少条在多面体的内部，而不是在面上或是多面体的棱？并说明理由.

分析 首先应弄清楚这样一些问题：这个凸多面体共有多少个顶点？有多少条棱？有多少条面对角线？这三个问题清楚了，本题就不难解决.

解 因为凸多面体每个顶点处正好有三种面(正方形、正六边形、正八边形)各一个，其中边数最少的是正方形，它的四个顶点必定为多面体的四个不同的顶点，而正六边形、正八边形的顶点均与正方形的顶点重合，故这个凸多面体共有 $4\times 12=48$(个)顶点.



这 48 个顶点共线连成 C_{48}^2 条线段.

因为从每个顶点都引出 3 条棱，而每条棱都计算了两次，所以这个凸多面体共有 $\frac{1}{2}\times 3\times 48=72$ 条棱.

又由于每个正方形都有 2 条对角线；每个正六边形都有 $C_6^2-6=9$ 条对角线；每个正八边形都有 $C_8^2-8=20$ 条对角线，所以这个凸多面体的表面上共有 $12\times 2+8\times 9+6\times 20=216$ 条面对角线.

于是，这个凸多面体的体对角线共有

$C_{48}^2-72-216=840$(条).

评注 本题主要应用了淘汰法，问题的关键是求凸多面体的顶点数，我们抓住顶点数最少的正方形，发现正六边形、正八边形的顶点都与正方形的顶点重合，求得这个凸多面体的顶点共有 48 个. 当然，我们也可以从顶点数最多的正八边形入手去考虑.

例 7 高为 8 的圆台内有一个半径为 2 的球 O_1，球心 O_1 在圆台的轴上，球 O_1 与圆台的上底面、侧面都相切. 圆台内可再放入一个半径为 3 的球 O_2，使得球 O_2 与球 O_1、圆台的下底面及侧面都只有一个公共点. 问除球 O_2 外，圆台内还能再放入多少个半径为 3 的球?

分析 对于切球问题，作出圆台的轴截面，可将立体图形转化为平面图形. 本题中，作出圆台的轴截面后，问题可转化为：等腰梯形中，除了 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 外，还能放入多少个半径为 3 的圆，使这些圆与 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 及下底边、腰均最多只有一个公共点，且这些圆也最多只有一个公共点.

解 如图 13-4，作过球心 O_2 的圆台的轴截面，再过球心 O_2 作与圆台的轴垂直的截面，过截面与圆台的轴交于圆 O. 如图 13-4，易求得 $OO_2=4$.



图13-4

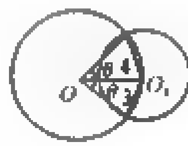


图13-5

这个问题等价于：在以 O 为圆心，4 为半径的圆上，除 O_2 外最多还可放几个点，使以这些点及 O_2 为圆心，3 为半径的圆彼此至多有一个公共点. 由图 13-5，有

$$\sin 45^\circ<\sin\theta=\frac{3}{4}<\sin 60^\circ,$$

从而，$45^\circ<\theta<60^\circ$.

所以，最多还可以放入

$$\left[\frac{360^\circ}{2\theta}\right]-1=3-1=2$$

个点，满足上述要求.



因此，圆台内最多还可以放入半径为3的球2个.

评注 图13-4是过球心O_2的圆台的轴截面(纵断面图)，由于另外放入的球与球O_2半径相等，所以这些球的球心与O_2共面，且它们的球心均在以O为圆心、OO_2为半径的圆上，因此还需要作出这些球心的图13-5(横断面图)，从而可将球的分布情况转化为点(球心)在圆O上的分布情况，问题便不难解决.

例8 (1995年全国高中数学联赛试题)将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，并且同一条棱的两端点异色.如果只有5种颜色可供选用，那么不同的染色方法的总数是多少?

分析 有两种思考方法.一种是从颜色考虑(分类)，另一种是从端点考虑(分步).

解法1 如图13-6，由于同一条棱上的两端点异色，因此允许同色的点有A与C，B与D.

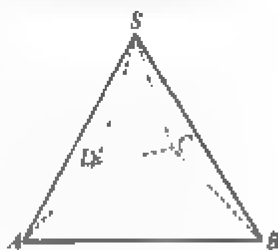


图13-6

(1) 用5种颜色时，有A_5^5种染法；

(2) 用4种颜色时，或A、C同色，或B、D同色，有$2C_2^1\cdot A_5^4$种染法；

(3) 用3种颜色时，必A、C同色且B、D同色，有$C_2^2\cdot A_5^3$种染法.

由分类计数原理，共有

$$A_5^5+2C_2^1\cdot A_5^4+C_2^2\cdot A_5^3=120+240+60=420$$

种不同的染色方法.

解法2 显然，S、A、B三点两两异色，它们共有A_5^3种染法.当S、A、B染好后，不妨设它们所染的颜色分别为1、2、3.

若C染颜色2(与A同色)，则D可染颜色3、4、5之一，有3种染法；

若C染颜色4，则D可染颜色3或5，有2种染法；

若C染颜色5，则D可染颜色3或4，也有2种染法.

可见，当S、A、B已染好后，C与D还有7种不同的染法.

根据分步计数原理，共有

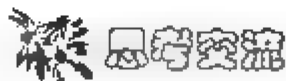
$$7A_5^3=7\times60=420$$

种不同的染色方法.

评注 若推广为n条棱、m种颜色，用递推的方法可得染法总数为

$$m(m-2)[(m-2)^{n-1}+(-1)^n].$$





思考题1　在半径为1的球面上有若干个点，其中任意两点间的距离不小于$\sqrt{2}$，求这些点个数的最大值．

分析　根据题目的特点，可通过建立空间直角坐标系，利用向量的方法来解决．

证明　首先证明，如果n个点$A_1,A_2,\cdots,A_n$在以O为球心、1为半径的球面上，使得$A_iA_j\geqslant\sqrt{2}(1\leqslant i<j\leqslant n)$，则$n\leqslant 6$．

事实上，如果$n>6$，在$\triangle A_iOA_j$中，由余弦定理，得

$$|A_iA_j|^2=2-2\cos\angle A_iOA_j\geqslant 2,$$

即$\angle A_iOA_j\geqslant 90^\circ$．

从而$\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j}=|\overrightarrow{OA_i}|\cdot|\overrightarrow{OA_j}|\cos\angle A_iOA_j\leqslant 0$．

在空间中，以O为原点并按如下方法选取直角坐标：

首先注意到，向量$\overrightarrow{OA_i}(i=1,2,\cdots,n)$中一定有三个向量不共面．否则，$n>4$个向量都在同一个大圆面上，于是一定有一对向量张成锐角，这是不可能的．不妨设$\overrightarrow{OA_1}$、$\overrightarrow{OA_2}$、$\overrightarrow{OA_3}$不共面，取直线$\overrightarrow{OA_1}$为OX轴，使点A_1的横坐标为1．其次取OY轴，使点A_2在平面XOY上，并且它的纵坐标是正的．最后取OZ轴，使点A_3的竖坐标也是正的．用(x_i,y_i,z_i)表示点A_i的坐标，则

$$\overrightarrow{OA_1}=(1,0,0),\overrightarrow{OA_2}=(x_2,y_2,0),\overrightarrow{OA_3}=(x_3,y_3,z_3),$$

其中$y_2>0,z_3>0$．

因此，对所有$i>1$，有$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_i}=x_i\leqslant 0$．

其次，对所有$i>2$，有$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_i}=x_2x_i+y_2y_i\leqslant 0$．于是，由$x_2\leqslant 0,x_i\leqslant 0,y_2>0$，得$y_i\leqslant 0$．

最后，对$i>3$，有$\overrightarrow{OA_3}\cdot\overrightarrow{OA_i}=x_3x_i+y_3y_i+z_3z_i\leqslant 0$．于是，由$x_3\leqslant 0,x_i\leqslant 0,y_3\leqslant 0,y_i\leqslant 0,z_3>0$，得$z_i\leqslant 0$．

在四个向量$\overrightarrow{OA_4}$、$\overrightarrow{OA_5}$、$\overrightarrow{OA_6}$、$\overrightarrow{OA_7}$中必有2个，它们所有坐标都是负数，从而它们的数量积大于0，这与$\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j}\leqslant 0(1\leqslant i<j\leqslant n)$矛盾．

故$n\leqslant 6$．

上式等号可以成立，如6个点$(\pm 1,0,0)$、$(0,\pm 1,0)$、$(0,0,\pm 1)$满足要求．

因此，n的最大值为6．

思考题2　空间有1989个点，其中任何三点不共线，把它们分成点数各不相同的30



组，在任何3个不同的组中各取1点为顶点作三角形，问要使这种三角形的总数最大，各组的点数应是多少？

分析 根据极端原理，我们猜想：当各组点数非常接近时，这种三角形的总数最大．可利用调整法来证明这个猜想是正确的．

解 当把1989个点分成30组，各组点数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_{30}$ 时，顶点在三个组的三角形总数为

$$S = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 30} n_i n_j n_k$$

可见，本题就是在 $n_1, n_2, \cdots, n_{30}$ 互不相等且 $\sum_{i=1}^{30} n_i = 1989$ 的条件，问当 $n_1, n_2, \cdots, n_{30}$ 分别取何值时，使 S 取最大值．

由于把1989个点分成点数各不相同的30组的分法只有有限种，故必有一种分法使 S 达到最大值．

不妨设 $n_1 < n_2 < \cdots < n_{30}$，则

(1) $n_{i+1} - n_i \leqslant 2(i = 1, 2, \cdots, 29)$．若不然，必有 i_0 使 $n_{i_0+1} - n_{i_0} \geqslant 3$．不妨设 $i_0 = 1$，这时有

$$S = n_1 n_2 \sum_{k=3}^{30} n_k + (n_1 + n_2) \sum_{3 \leq j < k \leq 30} n_j n_k + \sum_{3 \leq i < j < k \leq 30} n_i n_j n_k$$

令 $n'_1 = n_1 + 1, n'_2 = n_2 - 1$，则 $n'_1 + n'_2 = n_1 + n_2$，$n'_1 n'_2 = n_1 n_2 + n_2 - n_1 - 1 > n_1 n_2$．因此，当用 n'_1, n'_2 分别代替 n_1, n_2，且 $n_3, n_4, \cdots, n_{30}$ 不变时，S 的值变大，矛盾．故 $n_{i+1} - n_i \leqslant 2(i = 1, 2, \cdots, 29)$．

(2) 使 $n_{i+1} - n_i = 2$ 的 i 值不能多于1个．若不然，设有 $1 \leqslant i_1 < i_0 \leqslant 29$，使 $n_{i_1+1} - n_{i_1} = 2, n_{i_0+1} - n_{i_0} = 2$，则类似于(1)可知，用 $n'_{i_0} = n_{i_0} + 1, n'_{i_0+1} = n_{i_0+1} - 1$ 代替 n_{i_0}, n_{i_0+1} 时，S 的值也会变大，这不可能．故使 $n_{i+1} - n_i = 2$ 的 i 值不能多于1个．

(3) 使 $n_{i+1} - n_i = 2$ 的 i 值不能一个都没有．若不然，可设 $n_1 = k - 14, n_2 = k - 13, \cdots, n_{30} = k + 15$，则其和 $n_1 + n_2 + \cdots + n_{30} = 30k + 15$ 不可能等于1989．故使 $n_{i+1} - n_i = 2$ 的 i 值至少有一个．

综上可知，在 $n_1, n_2, \cdots, n_{30}$ 中，相邻两数之差恰有一个是2，其余的都是1．不妨设这30个数依次为 $m, m+1, \cdots, m+i_0-1, m+i_0+1, \cdots, m+30(1 \leqslant i_0 \leqslant 29)$，则 $30m - i_0 = 1524$，解得 $m = 51, i_0 = 6$．故当 S 取得最大时，这30组的点数依次为51，52，…，56，58，59，…，81．

评注 这是一个离散型最值问题，我们通过局部调整，使各组的点数趋于"平衡"状态，从而使 S 达到最大．



同步检测13

一、选择题

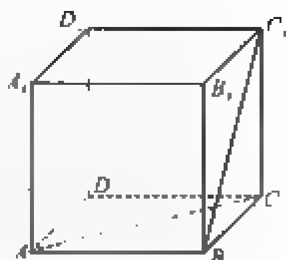


图 13-7

1.(2006年吉林省高中数学竞赛试题)如图13-7,在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,过顶点A_1作直线l,使l与直线AC和BC_1所成的角均为60°,则这样的直线l有……( )

A. 1条　　B. 2条

C. 3条　　D. 多于3条

2. 以平行六面体的8个顶点中的任意3个顶点为顶点的所有三角形中,锐角三角形最多可能有……( )

A. 28个　　B. 32个

C. 34个　　D. 36个

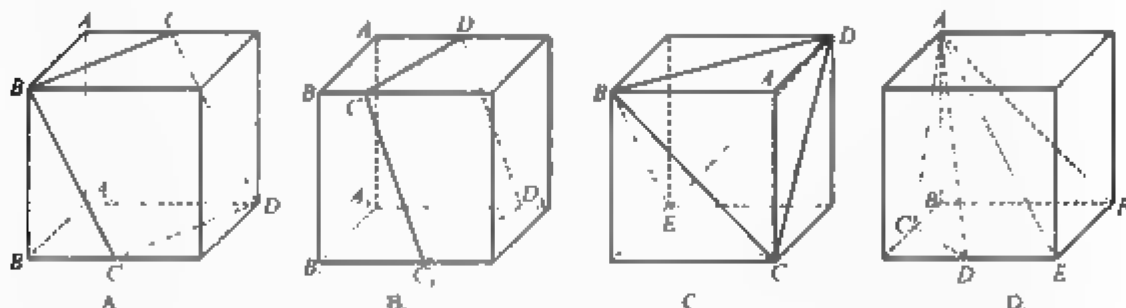
3. 从正方体的12条棱和各面的12条面对角线中选出n条,使得其中任意两条线段所在的直线都是异面直线,则n的最大可能值为……( )

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

4.(2005年湖南省高中数学竞赛试题)若干个棱长为2、3、5的长方体,依相同方向拼成棱长为90的正方体,则正方体的一条对角线贯穿的小长方体的个数是……( )

A. 64　　B. 66　　C. 68　　D. 70

5. 对给定的正方体分别作截面得到4个六面体,如下图中A、B、C、D所示:



请把棱数、顶点数与下表中相符的图号填在表中相应的空格处(配对选择):

棱数	12	11	10	9
顶点数	8	7	6	5
图号				

6.(1998年全国高中数学联赛试题)以正方体的8个顶点、12条棱的中点、6个面的



中心以及正方体的中心共27个点中，共线的三点组的个数是 ( )

A. 57　　B. 49　　C. 43　　D. 37

7. 空间有9个点，其中任4点不共面，在这9个点间连接若干条线段，使图中不存在四面体，则图中最多有三角形 ( )

A. 21个　　B. 24个　　C. 25个　　D. 27个

8. 空间有4个不共面的定点，以这4个点为顶点的平行六面体的个数是 ( )

A. 29　　B. 20　　C. 32　　D. 25

二、填空题

9. 在正方体的8个顶点中，能构成直角三角形的3个顶点的三点组的个数是____.

10. 过平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 任意两条棱的中点作直线，其中与平面 BDD_1B_1 平行的直线共有____条.

11. 如果一条直线与一个平面垂直，那么称此直线与平面构成"正交线面对"。在一个正方体中，由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的"正交线面对"的个数是____.

12. 有120个等球密布在正四面体 $ABCD$ 内(相邻两球相切，且边上的球与面相切)，那么这个正四面体的下面共放球的个数是____.

13. 如图13-8，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AB、DB_1、A_1D_1、CC_1 两两成异面直线，现作一对相交直线 l_1、l_2，使 l_1 与 AB、DB_1 均相交，l_2 与 A_1D_1、CC_1 均相交. 这样的相交直线 l_1、l_2 可以作____对.

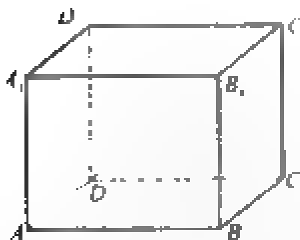


图13-8

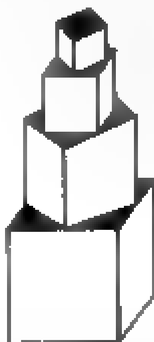


图13-9

14. 若干个正方体形状的积木按图13-9所示摆成塔形：上面正方体中下底面的四个顶点是下面正方体上底面各边的中点，最下面的正方体的棱长为1，且平放于桌面上. 如果所有正方体能直接看到的表面积超过8.8，则所有正方体的个数至少是____个.



15.（2005年四川省高中数学竞赛试题）如图13-10，一个立方体的每个角都被截去一个小三棱锥，变成一个新的立体图形．那么，在新立体图形顶点之间连线中，位于原立方体内部的有______条．

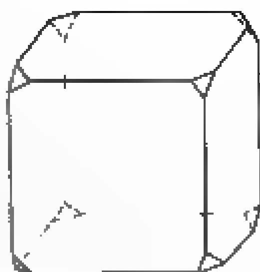


图13-10

16．有6种不同的颜料给正方体的六个面着色，使不同的面涂上不同的颜色．如果将正方体旋转之后出现某种涂色方案一样，则应认为是同一种涂法．那么，不同的涂法共有______种．

三、解答题

17．如图13-11，以正五棱柱ABCDE的顶点为顶点的四棱锥共有多少个？

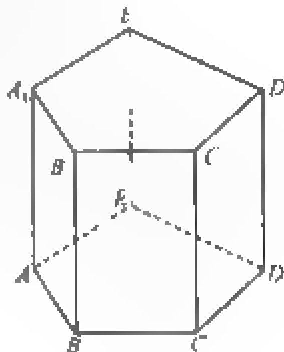


图13-11

18．已知a、b、c为空间中两两异面的三条直线，试证明：存在无穷多条直线与直线a、b、c都相交．

19．将一个正方体分割为n个不重叠的四面体，求n的最小值．

20．空间中有不共面的n个（$n \geq 3$）点，求证：存在无穷多个平面，恰好通过其中的两个点．



第14讲 轨迹与非常规问题

知识点金

1. 轨迹问题

近几年，随着新教材内容的调整，立体几何中有关轨迹的题目越来越多，并已进入高考和数学竞赛试题. 因此，我们有必要进行专题讲授和训练.

在空间，某些点、线、面按照某种规则运动，形成各式各样有趣的轨迹问题.

探求空间轨迹与探求平面轨迹类似，首先要熟悉基本轨迹图形，如平面图形（包括平面区域）、球、圆柱面、圆锥面等，可以根据已知条件去判断所求轨迹是其中哪一个. 另外，我们也常常先考虑满足部分条件的轨迹，再把另外的条件加上去，这就像是在轨迹中再求轨迹. 也可以分别考虑某些条件，得到两个或两个以上的轨迹，再求这些轨迹的公共部分.

对于较复杂的轨迹问题，除了分段考虑外，还要注意特殊情形下动点的轨迹. 总之，必须特别注意轨迹的纯粹性和完备性.

2. 非常规问题

在空间图形中，还有这样一些问题，它所运用的立体几何知识并不多，但却以一种想像力和空间构造而引人入胜，这就是所谓的非常规问题. 解答这类问题没有现成的方法，需要的是智慧和能力，凭的是人的一种直觉思维.

例题精析

例1 两条异面直线 a 与 b 互相垂直，定长为 m 的线段 AB 两端点 A、B 分别在 a、b 上



滑动，求 AB 中点的轨迹.

分析 由题设条件我们联想到平面上一个熟悉的轨迹问题：设 a、b 为同一平面上互相垂直的两条直线，设 a、b 的交点为 O，当定长为 m 的线段 AB 两端点 A、B 分别在 a、b 上滑动时，AB 中心 P 的轨迹是以 O 为圆心、$\frac{1}{2}m$ 为半径的圆. 现在 a、b 为异面直线，我们可通过平移转化为平面上的轨迹问题来解决.

解 如图 14-1，设 MN 为异面直线 a、b 的公垂线，其中 $M\in a$，$N\in b$，MN 的中点为 O，过 O 点分别作直线 $a'\parallel a$，$b'\parallel b$. 设 a'、b' 确定的平面为 α，则 $a'\perp b'$.

又设 $A\in a$，$B\in b$，$AB=m$，A、B 在平面 α 上的射影分别为 A'、B'，则 $A'\in a'$，$B'\in b'$，$MN=d$，则 $AA'=BB'=\frac{d}{2}$，且 $AA'\parallel BB'$，所以 $AA'BB'$ 为平行四边形，连接 $A'B'$，则 AB 与 $A'B'$ 互相平分，设其交点为 P，则有 $PA=PB=\frac{m}{2}$.

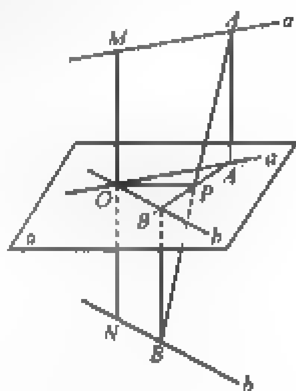


图 14-1

从而 $PA'=PB'=\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{m^2-d^2}$.

在平面 α 上，因为 $\angle A'OB'=90°$，$A'B'=\sqrt{m^2-d^2}$，所以 $OP=\frac{1}{2}A'B'=\frac{1}{2}\sqrt{m^2-d^2}$.

故由平面上熟知的结论，AB 中点 P 的轨迹是平面 α 上以 O 为圆心，$\frac{1}{2}\sqrt{m^2-d^2}$ 为半径的圆.

评注 为了探求平面直线 a、b 上两点 A、B 连线中点的轨迹，我们联想到平面上类似的问题，并通过平移和投影，将其转化为平面 α 上两条垂直直线 a'、b' 上两点 A'、B' 连线的中点轨迹问题，从而使问题得到简捷地解决.

例 2 设 P 为球 O 内一定点，A、B、C 为球面上三个动点，且满足 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90°$，以 PA、PB、PC 为棱作平行六面体，设 Q 为该平行六面体中与 P 相对的那个顶点. 当 A、B、C 三点在球面上移动时，求 Q 点的轨迹.

分析 仍然采用从平面向空间过渡的思路.

解 先看一个平面几何问题. 如图 14-2，P 为 $\odot O$ 内一定点，A、B 为圆周上两动点，且满足 $\angle APB=90°$，以 PA、PB 为邻边作平行四边形，设 Q 为与 P 相对的顶点. 当 A、B 在 $\odot O$ 上移动时，求 Q 点的轨迹.

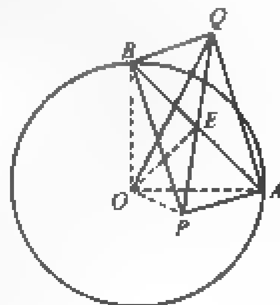


图 14-2

设 $\odot O$ 的半径为 R，$OP=d$，易知 $APBQ$ 为矩形，E 为矩形的



中心，在$\triangle OPQ$和$\triangle OAB$中，由中线长公式，得

$4OE^2+PQ^2=OP^2+OQ^2$，　　　　①

$4OE^2+AB^2=OA^2+OB^2$，　　　　②

因为$PQ=AB$，所以由①、②，得

$OP^2+OQ^2=OA^2+OB^2$，　　　　③

从而，$OQ^2=2R^2-d^2$.

于是，Q点的轨迹是以O为圆心，$\sqrt{2R^2-d^2}$为半径的圆.

回到三维空间，设球O的半径为R，球心O与定点P的距离为d，易知所作平行六面体为长方体．设长方体中与A相对的顶点为A'，则$PAQA'$、$PBA'C$都是矩形，类似③式，得

$$OP^2+OQ^2=OA^2+OA'^2=OA^2+OB^2+OC^2-OP^2,$$

即　$OQ^2=3R^2-2d^2$.

故在三维空间中，Q点的轨迹是以O为球心，$\sqrt{3R^2-2d^2}$为半径的球．

评注　由本例可以看出，二维平面上的问题可以推广到三维空间，只需把R^2的系数由2改为3，d^2的系数由-1改为-2，二维的矩形改为三维的长方体，圆改为球即可．可见，空间中许多轨迹问题都是由平面上的轨迹问题类比而来的.

例3　正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，P是正方体表面上一动点，且$AP=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(1)作出P点在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$表面上移动的轨迹；

(2)动线段AP将正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$截去几部分后，求剩余部分的体积和表面积.

分析　第(1)小题是一个轨迹作图问题，可以在正方体的表面上进行．由$AP=\frac{\sqrt{5}}{2}$不难想到取正方体有关棱的中点．对于第(2)小题的计算，应根据第(1)小题作图的情况，确定所剩余几何体的特征，然后考虑如何去计算.

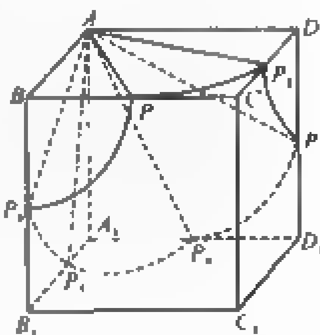


图14-3

解　(1)如图14-3，依次取BC、CD、DD_1、D_1A_1、A_1B_1、B_1B这六条棱的中点P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6，在平面$ABCD$、ADD_1A_1、AA_1B_1B内，以A为圆心，$\frac{\sqrt{5}}{2}$为半径作圆弧$\widehat{P_1P_2}$、$\widehat{P_3P_4}$、$\widehat{P_5P_6}$，由余弦定理，得它们所对圆心角$\angle P_1AP_2=\angle P_3AP_4=\angle P_5AP_6=\arccos\frac{4}{5}$.

在另外三个面CDD_1C_1、$C_1D_1A_1B_1$、B_1C_1CB内，分别以D、A_1、B为圆心，$\frac{1}{2}$为半径作圆弧$\overset{\frown}{P_2P_3}$、$\overset{\frown}{P_4P_5}$、$\overset{\frown}{P_6P_1}$，易证这三条弧上的点到A点的距离也都等于$\frac{\sqrt{5}}{2}$。

因此，弧线$P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_1$为动点P移动的轨迹。

(2)由(1)知，动线段AP将正方体截去了三部分，每一部分是以A为顶点、底面半径为$\frac{1}{2}$、高为1的圆锥的$\frac{1}{4}$，故剩余部分的体积V和表面积S分别为

$$V=1-3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{\pi}{16},$$

$$S=6-6\cdot\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{3(\sqrt{5}-1)\pi}{16}.$$

例4 (第5届IMO试题)直角的一边经过已知点A，另一边与已知线段BC至少有一个公共点，求空间中该直角顶点的轨迹。

解法1 所求的轨迹与点A及线段BC的相对位置有关，现在考察以下三种情况：

(1)A在BC上，如图14-4，分别以AB、AC为直径作两个球，这两个球球面上和球内的点均满足条件，故它们都是所求的轨迹。

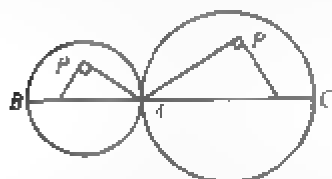


图14-4

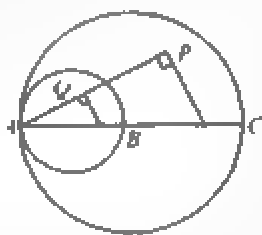


图14-5

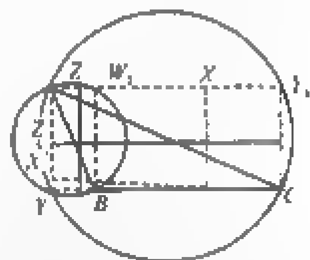


图14-6

(2)A在CB的延长线上，如图14-5，分别以AB、AC为直径作两个球，则所求轨迹是大球面上的点，以及在大球内但不在小球内的点。这是因为，如果Q是小球内的点，过Q作垂直于AQ的平面，那么这个平面和AC的交点是在A、B之间，但不在BC上。

(3)A不在BC或其延长线上，如图14-6，以AB为直径作球O_1，以AC为直径作球O_2，则凡是在球面O_1或O_2上的点都属于所求的轨迹。这是因为，若Y是这样的点，则$\angle AYB$(或$\angle AYC$)是直角。又凡是在球O_1(或球O_2)内而不在球O_2(或球O_1)内的点都属于所求轨迹。事实上，若X是这样的点，AX的延长线交球O_1(或球O_2)于Y_1(或Y_2)，则$\angle AY_1B$或$\angle AY_2C$是直角，而且过X且垂直于AX的平面和BC有公共点，但若E同时



是球 O_1 和球 O_2 内的点，则 AE 的延长线交球 O_1（或球 O_2）于 W_1（或 W_2），这时 $\angle AW_1C$（或 $\angle AW_2B$）虽为直角，但过 E 且垂直于 AE 的平面却不和 BC 相交（交点在 BC 的延长线上）.

综合以上三种情况可知，若 K_1、K_2 表示球 O_1、O_2 内的点集，$\overline{K_1}$、$\overline{K_2}$ 表示球 O_1、O_2 内和球面上的点集，则所求的轨迹为

$$(\overline{K_1}\cup\overline{K_2})/(K_1\cap K_2).$$

解法 2 设轨迹为 M，我们首先在一个平面内作考察．如图 14-7，l 是过点 A 的某一条直线，过线段 BC 上的任一点 Y 作 l 的垂线，交 l 于 X，则点 X 属于轨迹 M．显然，对于固定的直线 l，所有的点 X 的轨迹构成一条线段 $B'C'$，其端点 B'、C' 分别为自 B、C 向 l 所作垂线的垂足．当直线 l 变动时，B'、C' 的轨迹是分别以 AB、AC 为直径的圆 G_1、G_2（当点 A 和 B 或 C 重合时，则变成一点 A），点 X 的轨迹 M 是这两个圆周 G_1、G_2，以及在一个圆的外部，同时又在另一个圆的内部的平面部分，即图 14-7 中的阴影部分.

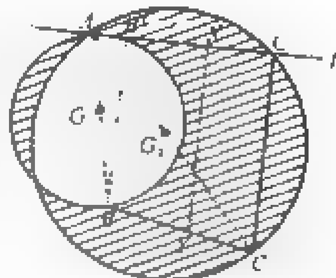


图 14-7

上面的结论不难推广到三维空间的情形．事实上，如果我们分别过 B、C 对所有的过点 A 的直线 l 作相应的垂直平面，那么交点的轨迹分别构成以 AB、AC 为直径的球面 K_1、K_2（当 A 和 B 或 C 重合时，则变成一点 A）．由此，所求几何轨迹 M 是两个球面 K_1、K_2，以及在一个球面的外部，同时又在另一个球面的内部的空间部分．

评注 上面求得的轨迹，包括 BC 上的点，这样的点，可以看作无限接近于 BC 的点．但严格地说，所求的轨迹以减去 BC 上的点为宜.

例 5 证明，可以用棱长相同的正四面体或正八面体来填满三维空间，并求出比值

$$\frac{\text{正四面体的个数}}{\text{正八面体的个数}}.$$

证明 空间可以用格点立方体填满．通过仿射变换，所有的立方体都变成平行六面体，这个平行六面体的各面是锐角为 60° 的六个全等的菱形．

每一个平行六面体的两个相对的三面角均为锐角的顶点处，各可切出一个正四面体而剩余一个正八面体．

由此立即得到所求的比值为：

$$\frac{\text{正四面体的个数}}{\text{正八面体的个数}}=2$$

评注 这是一个非常规问题，上面给出的解法巧妙之处在于并不拘泥于如何用正四面体和正八面体填满三维空间，而是由格点立方体可以填满空间这一事实入手，应用仿射变换，先把立方体变成各面均为含有锐角 60° 的平行六面体，再将这样的平行六面体切割



由正四面体和正八面体.这里仿射变换起了重要的作用.

例6 证明:在三维空间中,自原点引出的射线两两的夹角若都不超过$\frac{\pi}{4}$,那么这样的射线不超过27条.

分析 我们知道,在二维平面上,若自原点引出的射线两两的夹角都不超过$\frac{\pi}{4}$,那么这样的射线总数不超过9条.这个命题可用反证法或抽屉原理证明,由此启示我们也可以用反证法来证明本题.

证明 假设自原点引出28条射线,两两的夹角都不超过$\frac{\pi}{4}$.现以每条射线为轴,作以端点O为顶点的圆锥,圆锥母线与轴的夹角均为$\frac{\pi}{8}$,这些圆锥互不重叠.

以O为球心作一个半径为1的球,上述圆锥在球面上截得28个互不重叠的球冠,每个球冠的面积为$2\pi h=2\pi\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)$.由于

$$28\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)=28\left[1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right]$$

$$=14(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})>14(2-1.85)=14\times0.15>2,$$

所以28个球冠的面积之和大于整个球的面积$\frac{4}{3}\pi$,这些球冠必重叠,矛盾.

故自原点O引出的射线不超过27条.

评注 事实上,由于$\frac{2}{1-\cos\frac{\pi}{8}}<27$,所以本题中的27条可以改进为26条.

例7 (第三届IMO试题)空间中是否存在着具有下述性质的有限点集M:A、B是M中任意两点,则我们可以在M中另取C、D两点,使直线AB和CD互相平行但不重合.

分析 为了说明满足条件的有限点集M存在,只要能从所有可能的例子中举出其中的一个就行了.当然,应着眼于我们熟悉的几何体.下面给出几种不同的构造方法.

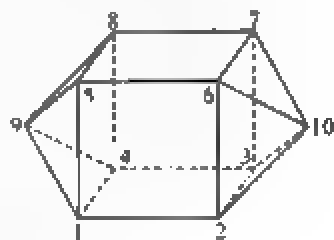


图14-8

解法1 我们将实际作出两个适合题意的点集M_1和M_2,然后证明这样的点集存在.

M_1是含有10个点的点集,它包括一立方体的8个顶点,及该立方体中心关于相对两面对称的两个点.如图14-8所示.显然,M_1满足题设的条件.

M_2是含有27个点的点集,这27个点是一个$2\times2\times2$的立方体的中心,及该立方体



各面上的26个格点，如图14-9所示。M_3亦即是空间中坐标为(x_1,x_2,x_3)的27个点，其中每个x_i的值可取-1,0或1。容易验证，M_3也满足题设的条件。

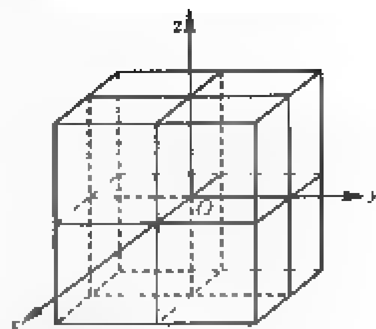


图14-9

解法2 为了证明这样一个点集存在，我们给出一个例子。

设n是偶数，$n\geqslant 4$，并设$P_1,P_2,\cdots,P_n$与$Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$是两个全等的n边形的对应顶点，它们在两个不同的平行平面上，且分别具有对称中心P与Q，设$P_iQ_i=PQ(i=1,2,\cdots,n)$。另外，在两平面的外侧，分别在$PQ$的延长线上取$R$、$S$两点，使$RO=OS=PQ$，这里$O$是$PQ$的中点。这个含有$2n+2$个点的点集$\{P_1,P_2,\cdots,P_n,Q_1,Q_2,\cdots,Q_n,R,S\}$满足条件。

(1) 若A、B是P_i、$P_j(i\neq j)$，或P_i、Q_i或R、S，则情形甚为明显，无须讨论。

(2) 若A、B是P_i、$Q_j(i\neq j)$，P_iQ_j不通过O，只要找出这两点关于O的对称点C、D。

(3) 若A、B是P_i、$Q_j(i\neq j)$，P_iQ_j通过O，则可取$C=R$,$D=P'_i$或$C=Q'_j$,$D=S$，其中P'_i是n边形$P_1P_2\cdots P_n$中和P_i相对的顶点，Q'_j是n边形$Q_1Q_2\cdots Q_n$中和Q_j相对的顶点。

(4) 若A、B中有一点为R或S，另一点为P_i或Q_i，情形和(3)类似。

解法3 一种简单的解法如下：取三个相等的长方体，把它们一个接一个地排好，如图14-10。这样当中一个长方体的8个顶点和两旁两个长方体的中心就组成了满足题设条件的点集，这个集合由10个点组成。

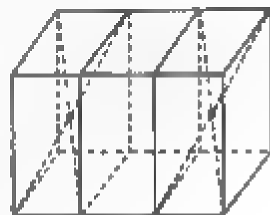


图14-10

上述方法可以作如下推广。设n为不小于4的任意偶数，在给定的两个平行平面上分别作两个n边形$A_1A_2\cdots A_n$和$B_1B_2\cdots B_n$，使得n边形$A_1A_2\cdots A_n$有对称中心P，n边形$B_1B_2\cdots B_n$有对称中心Q，并且

$$\overrightarrow{A_iB_i}=\overrightarrow{PQ}(i=1,2,\cdots,n)$$

再取点R和点S，使

$$\overrightarrow{SO}=\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{PQ}.$$

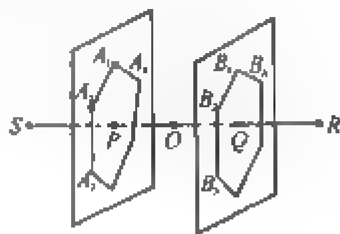


图14-11

其中，O是线段PQ的中点，如图14-11所示，于是点集

$$M=\{A_1,A_2,\cdots,A_n,B_1,B_2,\cdots,B_n,R,S\}$$

关于点O对称。

设A、B是集合M中的两个点，如果AB不经过O，那么分别取点A和点B关于点O的对称点作为点C和点D，显然必有$AB\parallel CD$；如果AB经过点O，这时只有下列两种可

能情况

1) 点 A 和点 B 就是点 R 和点 S，这时取 $C=A_1$，D B_1，使有 AB ，CD

2) 点 A 和点 B 分别属于集合 $\{A$，A，…，$A_n\}$ 和 $\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$，在多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中，设点 A 关于多边形中心 P 的对称点为 A'，于是有

$$\overrightarrow{SA'}=\overrightarrow{SP}+\overrightarrow{PA'}=\overrightarrow{SP}-\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PO}\quad\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AO}$$

由此可得 $SA'\parallel AO\parallel AB$

因此，取 $C=S$，$D=A'$，便满足题意.

评注 解法 1 中的点集 M 是解法 2 中的一个特例，解法 3 利用向量来处理，解得更清晰.

例 8 球面上有 n 个点，证明 可以将球面分为 n 个全等的区域，每个区域中恰含有个点.

证明 这 n 个点两两相连，得 C_n^2 条直线，与其中 条垂直且过球心的平面至多 C_n^2 个，在球面上截得至多 C_n^2 个大圆. 又过每两个已知点作 大圆，上述大圆的总数有限，因此，一定有 一条直径，它的两端均不在上述大圆上，以这两端点为南北极，建立起经纬度，则每两个已知点的经纬度均不相同(否则，两点的连线与过南、北极的 一个大圆垂直)，于是，有 n 个纬线圈将球面分为 n 个地带，每个地带恰有 个已知点

将第 个地带用经线等分为 n 份，使那个已知点在某 份的内部，将这 n 份记为 A_1，A，…，A_{1n}，而已知点在 A_1 内部.

假设前 k 个地带已经重分为 n 份 A_1，A_2，…，A_k，前 k 份各含 个已知点，并且每一份可由相邻的 份绕地轴(南北极的连线)旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 而得到. 考虑第 $k+1$ 个地带 B_{k+1}，B_{k+1} 中有一个已知点 这 地带的上面 个纬度圈被等分为 n 份，分别属于 A_1，A_2，…，A_n，等分这纬度圈的 n 条经线将 B_{k+1} 等分为 n 份，设已知点在第 m 份中.

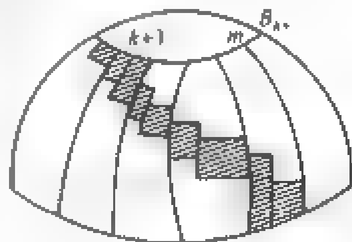


图 14 .2

将 B_{k+1} 用纬线分为 $2[m-(k+1)]$ 层(当 $m<k+1$ 时，用 $m+n$ 代替 m；当 $m=k+1$ 时，不必再分)，使最下 层含有已知点(这些纬线之间的距离不一定相等)，每一层被 n 条经线等分为 n 份，其中第 $2,4,\cdots,2[m-(k+1)]$ 层被上述的 n 条经线等分，第 $1,3,\cdots,2[m-(k+1)]-1$ 层被另 n 条经线等分，这 n 条经线是由前 n 条旋转而得到的.

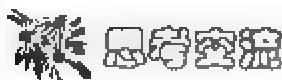
如图 .4 .2 中打上阴影的部分与 A_{k+1} 合并，记为 A_{k+1} 而 A_{k+1} 绕地轴旋转 $\frac{2\pi}{n}e$(e 是正整数)便得出其他的 $n-1$ 个部分 A_{k+1} $\leqslant i\leqslant n$，$i\neq k+1$)，其中 $A_{k+1}\supset A_{k+1}$，因此，A_{1}，A_{2}，…，A_{n} 中前 $k+1$ 份各含一个已知



点，并且每一份可由相邻的一份绕地轴旋转$\frac{2\pi}{n}$而得到.

这样继续下去，最终得出n个区域$A_{n,1}, A_{n,2}, \cdots, A_{n,n}$，每一个区域含一个已知点，并且在绕地轴旋转$\frac{2\pi}{n}$时，每个区域变为与它相邻的区域，因此它们是全等的.

评注 本题先通过作图说明这样的划分是可以进行的，然后用数学归纳法证明是正确的.



思考交流

思考题1 （第2届IMO试题）已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，P、Q分别是线段AC、B_1D_1上的动点.

(1) 求线段PQ中点M的轨迹；

(2) 设R是线段PQ上的点，且满足$RQ=2PR$，求R点的轨迹.

分析 由于AC和B_1D_1是两条互相垂直的异面直线，所以第(1)小题似乎与本讲中的例1类似，但不同的是线段PQ的长度在变化，因此它们有本质上的差异.

解 (1) 当P为AC的端点A或C，Q为B_1D_1的端点B_1或D_1时，对应的线段PQ分别是AD_1、AB_1、CD_1、CB_1，设它们的中点分别为E、F、G、H，这四个点是所求轨迹上四个特殊的点，如图14-13.

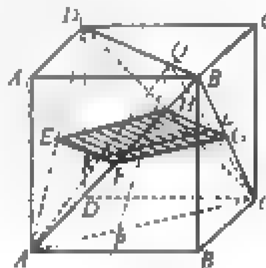


图14-13

连接EF、FH、HG、GE，在$\triangle AB_1D_1$中，$EF \parallel D_1B_1$，且$EF=\frac{1}{2}D_1B_1$，同理$HG \parallel D_1B_1$，且$HG=\frac{1}{2}D_1B_1$，所以

$$EF \parallel HG，且 EF = HG = \frac{1}{2}D_1B_1.$$

从而，$EFGH$为平行四边形.

又$AC \perp B_1D_1$，所以$EF \perp FH$，故$EFGH$是正方形，它的边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$（a表示正方体的棱长）.

当点P、Q分别在线段AC、B_1D_1上运动时，线段PQ的中点M的轨迹就是上述正方形$EFGH$的内部（包括边界）.下面我们来证明这个结论.

设Q是B_1D_1上任意一点，连接A、C分别交EF、GH于点K、L.在$\triangle AB_1D_1$中，因为$EF \parallel D_1B_1$，且E是AD_1的中点，所以K为AQ的中点.同理，L为CQ的中点.因此，KL



为$\triangle QAC$的中位线，Q与AC上任一点P所连线段PQ的中点M必在线段KL上，且$KL \parallel AC$，$KL \parallel FG \parallel EH$，故线段$KL$上各点都在正方形$EFGH$内部，从而点$M$必在正方形$EFGH$的内部（当$P$、$Q$中有一点是$AC$或$B_1D_1$的端点时，点$M$在正方形$EFGH$的边界上）。

再证明正方形$EFGH$内部（包括边界）的任一点M必定是某一线段PQ的中点（$P \in AC$，$Q \in B_1D_1$）。

设M是正方形$EFGH$内的任一点，过点M作$KL \parallel FG$，分别交EF、GH于K、L，连接AK与B_1D_1相交于Q，显然K是AQ的中点。连接CQ必过点L。于是，KL在平面QAC上，从而M在平面QAC上。连接QM并延长必与AC相交，设交点为P。由$KL \parallel FG$可知$KL \parallel AC$，并且K是QA的中点，所以M必为线段PQ的中点。

由此可见，所求点M的轨迹为正方形$EFGH$的内部（包括边界），这个正方形的边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$。

(2) 与(1)相仿，可得$RQ = 2PR$的动点R的轨迹为矩形$E'F'G'H'$的内部（包括边界），且这个矩形的边长分别为$\frac{\sqrt{2}}{3}a$和$\frac{2\sqrt{2}}{3}a$。

评注 本题先通过极端情形确定了所求轨迹上的四个特殊点，再就一般情况求出点的轨迹是以这四个特殊点为顶点的正方形内部的点（包括边界）。反之，又证明了这个正方形区域内的任意一点都是线段PQ的中点。这是求轨迹问题必不可少的两个步骤。

思考题2 在一个锐二面角内有一个与两半平面都相切的球O，分别在球面和二面角的两个半平面上各求一点A、B、C，使$\triangle ABC$的周长（记为$l_{\triangle ABC}$）最小。

分析 可通过作对称点确定$\triangle ABC$周长的最小值。

解 先找出二面角内任意一点A以及两个半平面上的两点B、C构成的$\triangle ABC$，然后通过局部调整，使$\triangle ABC$的周长最小。

(1) 设二面角$\alpha - l - \beta$的平面角为θ，A为二面角内一点，作点A关于两个半平面的对称点A_1、A_2，连接A_1A_2，分别交α、β于B、C，如图14-14。当点A给定后，所得$\triangle ABC$周长最小，这是因为

$l_{\triangle ABC} = AB + BC + CA = A_1B + BC + CA_2 = A_1A_2$。

对任意两点B_1、C_1不全在直线A_1A_2上，则有

$l_{\triangle AB_1C_1} = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_2 > A_1A_2 = l_{\triangle ABC}$。

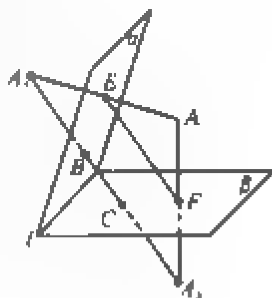


图14-14

(2) 任取球面上一点A，设AA_1交面α于E，AA_2交面β于F。因为$AE \perp l$，$AF \perp l$，所以$l \perp$平面AEF，设平面AEF交l于G，则$\angle EGF = \theta$，且$AG \perp l$。



因为 A、E、G、F 四点共圆，AG 为该圆的直径，$EF = AG\sin\theta$，所以

$l_{\triangle ABC} = A_1A_2 = 2EF = 2AG\sin\theta$.

显然，当 AG 最小时，$l_{\triangle ABC}$ 取得最小值，即点 A 到 l 的距离最小时，所得 $\triangle ABC$ 周长最小.

根据以上分析，得到 A、B、C 三点的作法如下：由球心 O 向 l 作垂线交球面于 A 点，则球面上 A 点到 l 的距离最小，再由(1)利用对称方法得到 B、C，故 $\triangle ABC$ 即为所求.

同步检测 14

一、选择题

1. 如图 14-15，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，侧面 ABB_1A_1 内的动点 P 到底面 $ABCD$ 的距离等于到直线 B_1C_1 距离的 2 倍，则在侧面 ABB_1A_1 内动点 P 的轨迹是 …………（ ）

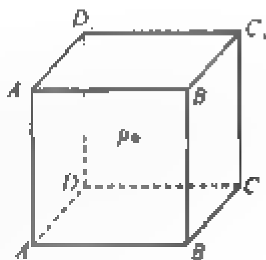


图 14-15

A. 一条线段　　　B. 圆的一部分

C. 椭圆的一部分　　D. 双曲线的一部分

2. 设互相垂直的两条异面直线的距离为 d，有一条长度为定值 $l(l>d)$ 的线段 PQ 的两个端点分别在两条异面直线上移动，则线段 PQ 的中点 M …………（ ）

A. 必落在同一条直线上　　B. 必落在同一个圆上

C. 必落在同一个椭圆上　　D. 不在同一个平面内

3. 已知两个点，那么其中一个点在经过另一点的所有平面上射影的轨迹是 …（ ）

A. 一条线段　　B. 一个圆

C. 平面上的带形区域　　D. 一个球面

二、填空题

4. 已知四面体 $ABCD$，M 为空间一动点，且满足 $MA^2+MB^2=MC^2+MD^2$，则点 M 的轨迹是______.

5.（第 17 届希望杯全国数学邀请赛试题）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，在正方体表面上与点 A 距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的点的集合形成一曲线（此曲线不一定在同一平面上），则此曲线的长度为______.



三、解答题

6. 已知平面α及α同侧两定点A与B，P为平面α上的动点．若直线PA、PB与平面α所成的角相等，求P点的轨迹．

7. (2003年罗马尼亚数学竞赛试题)在一个正方体内部有2003个点，证明：可以将这个正方体分为至少2003个小正方体，使得所给的任一已知点在同一个小正方体内(而不是面上)．

8. (2005年克罗地亚数学竞赛试题)求三面角内或表面上点的轨迹，使其满足到三面角表面的距离的和等于给定的正数a．

9. 在空间中给定n个$(n\geq 5)$平面，其中任何三个平面都有一个公共点，但没有三个以上的平面通过同一个点．证明：在这n个平面将空间分成的部分中，有不少于$\frac{2n-3}{4}$个四面体．

10. (2004年白俄罗斯数学竞赛试题)如图14-16，E是正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的面$A_1B_1C_1D_1$内的一点，记直线AB、A_1D_1、B_1D、EC_1分别为l_1、l_2、l_3、l_4，求点E的轨迹，使得存在一条直线与l_1、l_2、l_3、l_4均相交．

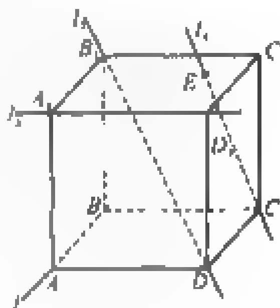


图14-16

11. (2003年匈牙利数学竞赛试题)已知一个$10\times10\times10$的立方体格，A，B，C三个人按如下规则做游戏，他们以$(A,B,C,A,B,C,\cdots)$的次序轮流进行，分别从三个不同的方向将$1\times1\times10$的砖形物放进立方体格内，每个人有一个方向，且他必须将砖形物总以这个方向放置．砖形物应该全部放入已知的立方体格内，可以相邻，但不能重叠．求这种游戏最多进行多少轮？

12. (2004年爱尔兰数学竞赛试题)一个凸多面体被称为“足球体”，满足下列性质：

①每个面要么是正五边形，要么是正六边形；

②与五边形的面相邻的面都是六边形，其中两个面相邻是指这两个面有一条公共的边．

求一个“足球体”所有可能的五边形的面和六边形的面的个数．



第15讲 立体几何综合问题

知识点金

在高中数学竞赛中，与立体几何有关的综合问题虽然不是很多，但也时有出现，并有逐渐增加的趋势.

与立体几何有关的综合题，常常与函数、数列、三角函数、不等式、解析几何密切相关，特别是与数论、平面几何、组合数学相关的综合题最受竞赛命题者的青睐.

本讲主要通过例题，谈谈立体几何综合题的解题思路.

例题精析

例1 （2002年全国高中数学联赛试题）由曲线$x^2=4y$，$x^2=-4y$，$x=4$，$x=-4$围成的图形绕y轴旋转一周所得旋转体的体积为V_1；满足$x^2+y^2\leqslant 16$，$x^2+(y-2)^2\geqslant 4$，$x^2+(y+2)^2\geqslant 4$的点(x,y)组成的图形绕y轴旋转一周所得旋转体的体积为V_2，则V_1与V_2满足关系式…………（　）

A. $V_1=\frac{1}{2}V_2$　　B. $V_1=\frac{2}{3}V_2$　　C. $V_1=V_2$　　D. $V_1=2V_2$

分析　图15-1和图15-2中两个平面图形（阴影部分）绕y轴旋转一周所得两个旋转体都不是"常规"的几何体，不能通过计算体积的方法来处理，因此可考虑应用祖暅原理来判断V_1与V_2的关系.

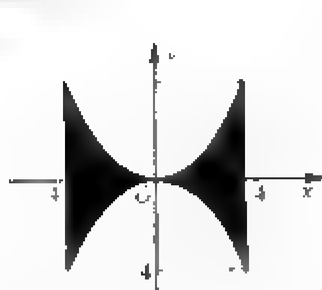


图15-1

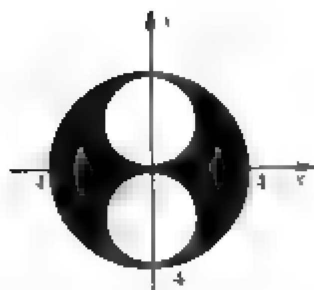


图15-2

解　显然,所得两个旋转体夹在相距为8的两个平行平面之间,用任意一个与y轴垂直的平面截这两个旋转体,设截面与原点的距离为$|y|$,则所得截面的面积分别为

$S_1=\pi(4^2-4|y|)=4\pi(4-|y|)$,

$S_2=\pi(4^2-y^2)-\pi[4-(2-|y|)^2]=4\pi(4-|y|)$.

因此,$S_1=S_2$.

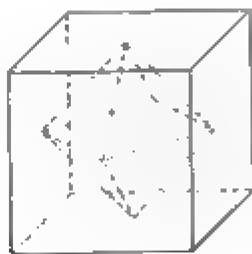
由祖暅原理知,$V_1=V_2$,故应选C.

评注　这是一道立体几何与解析几何的综合题,设计优美,是一道很好的小综合题.另外,祖暅原理是判断两个形状不同的几何体体积相等的重要依据.

例2　连接正多面体各个面的中心得到一个新的正多面体,我们称这个新正多面体为原多面体的正子体.正方体T_1的表面积为$S_1=6$,它的正子体为T_2,表面积为S_2,T_2的正子体为T_3,表面积为S_3,…,如此下去.记第n个正子体T_n的表面积为S_n,则$\lim(S_1+S_2+\cdots+S_n)=$＿＿＿＿.

分析　首先从确定各正子体的形状入手,然后通过计算推导形状相同的相邻两子体棱长的关系,再看它们的表面积所构成数列的特点,转化为数列的求和问题.

解　由题设知,T_1,T_3,…均为正方体,T_2,T_4,…为正八面体.设$T_i(i=1,2,\cdots,n)$的棱长为a_i.如图15-3,易知$a_2=\frac{\sqrt{2}}{2}a_1$.


图15-3

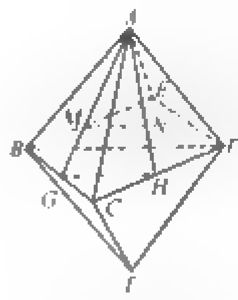


图15-4

如图15-4,计算得$GH=\frac{1}{2}BD=\frac{\sqrt{2}}{2}a_2=\frac{1}{2}a_1$,$MN=\frac{2}{3}GH=\frac{\sqrt{2}}{3}a_2$.



易知,对于正整数 n,有

$$a_{2n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}a_{2n},\ a_{2n+2}=\frac{\sqrt{2}}{3}a_{2n+1}.$$

而 $S_1=6a_1^2$,$S_2=8\times\frac{\sqrt{3}}{4}a_2^2=\sqrt{3}a_1^2$,则 $S_2=\frac{\sqrt{3}}{6}S_1$,$S_3=6\times\frac{2}{9}a_2^2=\frac{4}{3}a_2^2=\frac{2\sqrt{3}}{9}S_2$.

同样,$S_{2n}=\frac{\sqrt{3}}{6}S_{2n-1}$,$S_{2n+1}=\frac{2\sqrt{3}}{9}S_{2n}$.

于是,$\frac{S_{2n+1}}{S_{2n-1}}=\frac{1}{9}$,$\frac{S_{2n+2}}{S_{2n}}=\frac{1}{9}$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_1+S_2+\cdots+S_n)=\frac{S_1}{1-\frac{1}{9}}+\frac{S_2}{1-\frac{1}{9}}=18+3\sqrt{3}$.

评注 由于 T_1,T_3,…均为正方体,T_2,T_4,…均为正八面体,所以 S_1,S_3,…和 S_2,S_4,…分别构成了无穷递缩等比数列.

例3 如果一个 $n(n\geq 4)$ 面体共有 m 个面是直角三角形,那么称这个 n 面体的直度为 $\frac{m}{n}$.

(1) 请构造一个直度是 $\frac{3}{4}$ 的四面体;

(2) 是否存在直度为1的四面体?请说明理由;

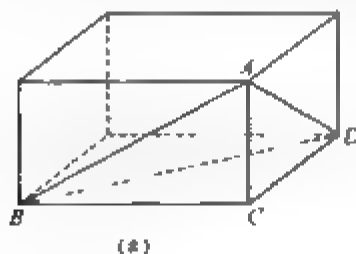
(3) 若一个 n 面体的直度为1,棱数为 k,试将 k 表示成 n 的函数;

(4) 证明:不存在直度1的五面体.

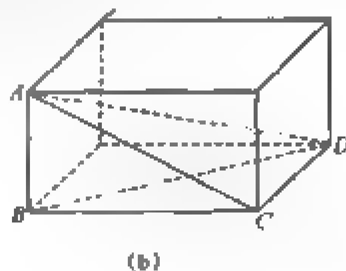
分析 第(1)(2)小题都可以在长方体中构造出来.对于第(3)小题,可通过分析 n 面体的面数和棱数的关系来建立 n 和 k 的函数关系.对于第(4)小题,可在(3)的基础上,通过奇偶分析得到证明.

解 (1) 在图15-5(a)所示的长方体中,四面体 $ABCD$ 是直度为 $\frac{3}{4}$ 的四面体.

(2) 存在直度为1的四面体,如图15-5(b)所示的四面体 $ABCD$.



(a)



(b)

图15-5



(3) 因为n面体的直度为1，所以它的n个面都是直角三角形，从而它的每个面均含有3条棱，且每条棱分属两个面，于是有

$$2k=3n\text{，而 } k=\frac{3}{2}n.$$

(4) 由(3)知，直度为1的n面体的棱数k与面数n满足$k=\frac{3}{2}n$。

因此，当n面体的直度为1时，n必为偶数．而$n=5$不是偶数，故不存在直度为1的五面体。

评注　本题由具体到抽象，由特殊到一般，是一道立体几何与简单数论的综合题。

例4　在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，以斜边AB所在直线为轴将$\triangle ABC$旋转一周生成两个圆锥，设这两个圆锥的侧面积之和为S_1，$\triangle ABC$的内切圆面积为S_2，记$\frac{BC+CA}{AB}=x$。

(1) 求函数$f(x)=\frac{S_1}{S_2}$的解析式，并求其定义域；

(2) 求函数$f(x)$的最小值．

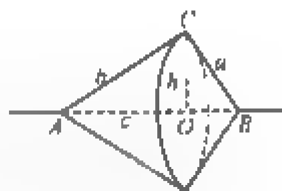


图15-6

分析　首先画出直观图(如图15-6)，显然两个圆锥的侧面积和$\triangle ABC$的内切圆面积都可以用$\triangle ABC$的边长表示，再由$\frac{BC+CA}{AB}=x$，即可求出$f(x)$的表达式．至于如何求函数$f(x)$的定义域和最小值，这需根据函数$f(x)$表达式的特点来确定．

解　(1) 为方便起见，设$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，则斜边上的高$h=\frac{ab}{c}$，$\triangle ABC$的内切圆半径$r=\frac{a+b-c}{2}$．

从而，$S_1=\frac{1}{2}\cdot 2\pi h\cdot a+\frac{1}{2}\cdot 2\pi h\cdot b=\frac{\pi ab}{c}(a+b)$，

$S_2=\pi r^2=\frac{\pi(a+b-c)^2}{4}$．

所以，$f(x)=\frac{S_1}{S_2}=\frac{4ab(a+b)}{c(a+b-c)^2}$．　　①

由$\begin{cases}\frac{a+b}{c}=x,\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}$得$\begin{cases}a+b=cx,\\ ab=\frac{c^2}{2}(x^2-1)\end{cases}$

代入①，得$f(x)=\frac{2(x^2+x)}{x-1}$．

在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$a=c\sin A$，$b=c\cos A\left(0<A<\frac{\pi}{2}\right)$，则



$x=\frac{a+b}{c}=\sin A+\sin B=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$

因为$0<A<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{4}<A+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$.

因此$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，即$1<x\leqslant\sqrt{2}$.

故$f(x)=\frac{2(x^2+x)}{x-1}$，其定义域为$\{x\mid 1<x\leqslant\sqrt{2}\}$.

(2) $f(x)=\frac{2[(x-1)^2+3(x-1)+2]}{x-1}=2\left[(x-1)+\frac{2}{x-1}\right]+6$. ②

令$t=x-1(0<t\leqslant\sqrt{2}-1)$，则②式可化为

$g(t)=2\left(t+\frac{2}{t}\right)+6$.

设$0<t_1<t_2\leqslant\sqrt{2}-1$，则

$$g(t_1)-g(t_2)=2(t_1-t_2)+4\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)$$
$$=2(t_1-t_2)\left(1-\frac{2}{t_1t_2}\right).$$

因为$0<t_1<t_2\leqslant\sqrt{2}-1$，所以$t_1-t_2<0$，$0<t_1t_2<\frac{1}{4}$，从而$1-\frac{2}{t_1t_2}<0$.

因此，$g(t_1)-g(t_2)>0$，即$g(t_1)>g(t_2)$.

故$g(t)$在$(0,\sqrt{2}-1]$上是减函数.

于是，当$t=\sqrt{2}-1$，即$x=\sqrt{2}$时，$f(x)_{\min}=6\sqrt{2}+8$.

评注 这是一道立体几何与函数的综合题，本题设置了三个关卡：(ⅰ)由①式如何整体地消去a、b、c求出$f(x)$的表达式?我们首先挖掘出了一个隐含条件$a^2+b^2=c^2$，并与$\frac{a+b}{c}=x$联立整体地求出了$a+b$与ab；(ⅱ)为了确定函数的定义域，我们又回到$Rt\triangle ABC$中，得到$x=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$，转化为求三角函数的值域问题；(ⅲ)在求函数$f(x)=\frac{2(x^2+x)}{x-1}(1<x\leqslant\sqrt{2})$的最小值时，我们把$f(x)$的表达式进行了适当的变形，得到②式，这时似乎可利用均值不等式解决(读者不妨一试)，但我们选择了一个重要函数的单调性解决了问题，值得重视.

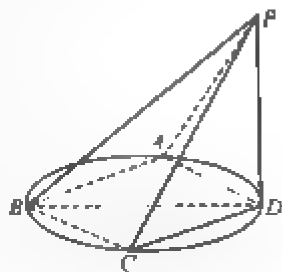


图15-7

例5 如图15-7，在一圆形湖泊周边的三点A、B、C处测量直立于湖岸上D点处的旗杆DP的仰角分别为α、β、α. 如果$AB=a$，



$BC=b$，试证明旗杆的高为

$$DP=\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\frac{ab}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}.$$

分析　$\triangle PDA$、$\triangle PDB$、$\triangle PDC$ 均为直角三角形，且 $\angle PAD=\alpha$、$\angle PBD=\beta$、$\angle PCD=\alpha$ 均为已知，但是由于 AD、BD、CD 的长都不知道，所以要在这三个直角三角形中直接求 DP 是有困难的。如果让 DP 参与运算，则 AD、BD、CD 都可以用 DP 表示，再借助于 $AB=a$，$BC=b$，可以设法在圆内接四边形 $ABCD$ 中建立关于 DP 的方程，通过解方程求出 DP。

证明　设 $DP=h$，则在 $Rt\triangle PDA$、$Rt\triangle PDB$、$Rt\triangle PDC$ 中，有 $AD=h\cos\alpha$，$BD=h\cos\beta$，$CD=h\cos\alpha$。

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理，得

$$\cos\angle BAD=\frac{a^2+h^2\cos^2\alpha-h^2\cos^2\beta}{2ah\cos\alpha},$$

$$\cos\angle BCD=\frac{b^2+h^2\cos^2\alpha-h^2\cos^2\beta}{2bh\cos\alpha}.$$

因为四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形，所以 $\angle BAD+\angle BCD=180°$，有 $\cos\angle BAD+\cos\angle BCD=0$，即

$$\frac{a^2+h^2\cos^2\alpha-h^2\cos^2\beta}{2ah\cos\alpha}+\frac{b^2+h^2\cos^2\alpha-h^2\cos^2\beta}{2bh\cos\alpha}=0.$$

化简得 $ab+h^2\cos^2\alpha-h^2\cos^2\beta=0$.

解得 $h=\sqrt{\dfrac{ab}{\cos^2\beta-\cos^2\alpha}}$.

又
$$\begin{aligned}\cos^2\beta-\cos^2\alpha&=\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\\&=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\\&=\frac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\\&=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\end{aligned}$$

故 $h=DP=\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\dfrac{ab}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$.

评注　这是一道数学味较浓的综合应用性问题，需要具有一定的空间想像能力和逻辑思维能力，主要考查方程思想和三角恒等变换。

例 6　（2002 年湖南省高中数学竞赛试题）设长方体的长、宽、高分别是为 a、b、c，对



角线长为 l.求证:

$(l^4-a^4)(l^4-b^4)(l^4-c^4)\geqslant 512a^4b^4c^4$.

分析 欲证不等式次数较高,且变量 a、b、c 分布在不等号两边,所以首先需要集中变量,并作适当的换元,利用均值不等式证明.当然,我们也可以从局部入手,譬如先对 l^4-a^4 进行变形,并借助了隐含条件 $l^2=a^2+b^2+c^2$,将 l 换掉,这一项突破了,其余两项 l^4-b^4、l^4-c^4 同理可以得到证明.

证法1 原不等式等价于

$$\left(\frac{l^4}{a^4}-1\right)\left(\frac{l^4}{b^4}-1\right)\left(\frac{l^4}{c^4}-1\right)\geqslant 512. \qquad ①$$

设 $x=\frac{a^2}{l^2}$,$y=\frac{b^2}{l^2}$,$z=\frac{c^2}{l^2}$,则由 $l^2=a^2+b^2+c^2$,得 $x+y+z=1$,从而不等式①可写为

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\geqslant 512. \qquad ②$$

因为
$$\frac{1}{x^2}-1=\frac{(1-x)(1+x)}{x^2}=\frac{(y+z)(x+y+z+x)}{x^2}$$
$$\geqslant\frac{2\sqrt{yz}(2x+2\sqrt{yz})}{x^2}$$
$$\geqslant\frac{2\sqrt{yz}\cdot 4\sqrt{x}\sqrt{yz}}{x^2}$$
$$=\frac{8\sqrt[4]{x^2y^4z^4}}{x^2},$$

当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时,上式等号同时成立.

同理,$\frac{1}{y^2}-1\geqslant\frac{8\sqrt[4]{x^4y^2z^4}}{y^2}$,$\frac{1}{z^2}-1\geqslant\frac{8\sqrt[4]{x^4y^4z^2}}{z^2}$.

所以 $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\geqslant 8^3=512$,即②成立.从而①成立.

故 $(l^4-a^4)(l^4-b^4)(l^4-c^4)\geqslant 512a^4b^4c^4$.

证法2 因为 $l^2=a^2+b^2+c^2$,所以

$$l^4-a^4=(l^2-a^2)(l^2+a^2)$$
$$=(b^2+c^2)(2a^2+b^2+c^2)$$
$$\geqslant 2bc(2a^2+2bc)$$
$$\geqslant 8abc\sqrt{bc},$$

当且仅当 $a=b=c$ 时,上式等号同时成立.



同理，$l^4-b^4\geqslant 8abc\sqrt{ca}$，$l^4-c^4\geqslant 8abc\sqrt{ab}$.

以上三式相乘，得

$(l^4-a^4)(l^4-b^4)(l^4-c^4)\geqslant 512a^4b^4c^4$.

例7 四面体 $ABCD$ 的内切球球 O 分别与面 ABD、面 BCD 切于点 E、F. 证明：$\angle AEB=\angle CFD$.

分析 这是一道平面几何味极浓的立体几何题，首先应作出直观图，注意到面 ABD 与面 BCD 的公共棱长 BD，可先考虑证明两切点 E、F 对棱 BD 所张的角相等，然后通过三角形的内角和为 180°，逐步进行推导.

证明 如图15-8，为叙述方便，将内切球球 O 在面 BCD、面 CDA、面 DAB、面 ABC 上的切点分别改记为 A_0、B_0、C_0、D_0，于是 $E=C_0$，$F=A_0$.

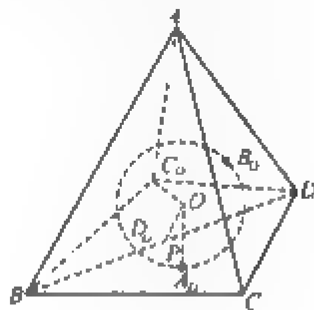


图15-8

设球 O 的半径为 r，易知棱 $BD\perp$ 面 OA_0C_0，设垂足为 P，则

$$C_0P=\sqrt{OP^2-OC_0^2}=\sqrt{OP^2-r^2}=A_0P.$$

因为 $A_0P\perp BD$，$C_0P\perp BD$，所以

$BA_0=BC_0$，$DA_0=DC_0$.

从而 $\triangle BA_0D\cong\triangle BC_0D$，则 $\angle BA_0D=\angle BC_0D$.

也就是说，相邻两面 ABD、BCD 上的切点 C_0、A_0 对棱 BD 所张的角相等，其他棱的情况与此类似.

在 $\triangle ABD$ 中，设 $\angle AC_0B=\alpha$，$\angle BC_0D=\beta$，$\angle AC_0D=\gamma$，则

$\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$. ①

于是，$\angle AD_0B=\alpha$，$\angle BA_0D=\beta$，$\angle AB_0D=\gamma$.

在 $\triangle BCD$ 中，设 $\angle CA_0D=\alpha_1$，$\angle BA_0C=\gamma_1$.

因为 $\angle BA_0D=\beta$，所以

$\alpha_1+\beta+\gamma_1=360^\circ$.

于是，$\alpha_1+\gamma_1=\alpha+\gamma$. ②

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle AD_0B=\angle AC_0B=\alpha$，$\angle BD_0C=\angle BA_0C=\gamma_1$.

设 $\angle AD_0C=\beta_1$，则

$\alpha+\beta_1+\gamma_1=360^\circ$. ③

在 $\triangle ACD$ 中，$\angle AB_0C=\beta_1$，$\angle CB_0D=\alpha_1$，$\angle AB_0D=\gamma$，则

$\alpha_1+\beta_1+\gamma=360^\circ$. ④

③＋④得 $(\alpha_1+\gamma_1)(\alpha+\gamma)+2\beta_1=720^\circ$.

据此及②，得 $2(\alpha+\gamma)+2\beta_1=720^\circ$.

而 $\alpha+\gamma+\beta_1=360^\circ$. ⑤



由①、⑤得 $\beta_1=\beta$.从而,④式可化为

$\alpha_1+\beta+\gamma=360^\circ$. ⑥

由①、⑥得 $\alpha_1=\alpha$,而 $\angle AC_0B=\angle CA_0D$.

故 $\angle AEB=\angle CFD$.

例8 如果一个四面体在一个顶点处的三个面角均为直角,那么称这个四面体为直角四面体.求证:存在一个直角四面体,其六条棱的长度皆为正整数.

分析 这是一道立体几何与数论的综合题,类似于平面几何中的勾股数组.下面给出一种构造性证法.

证明 (1)令 x、y、z 为整数,且满足以下两个条件:

$xyz(x^2-z^2)(y^2-z^2)\neq 0$, ①

$x(y^2-z^2)=\frac{x+z}{2}[(x-z)^2-y^2]$. ②

(2)如图15-9,对于一直角四面体 $A-BCD$($\angle BAC=\angle CAD=\angle DAB=90^\circ$),取 $AB=|x(y^2-z^2)|$,$AC=|2xyz|$,$AD=|y(x^2-z^2)|$,在 Rt$\triangle BAC$、Rt$\triangle CAD$ 中,有

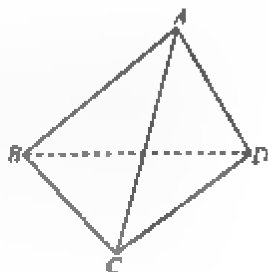


图15-9

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=|x(y^2+z^2)|$,

$CD=\sqrt{AC^2+AD^2}=|y(x^2+z^2)|$.

在 Rt$\triangle DAB$ 中,由②及勾股定理,得

$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\frac{1}{2}|(x+z)[(x-z)^2+y^2]|=1$

因为$(x-z)^2-y^2=(x-z+y)(x-z-y)$,且 $x-z+y$ 与 $x-z-y$ 有相同的奇偶性,所以 BD 的长为整数.

由此可见,只要三个整数 x、y、z 满足①、②,即可获得棱长皆为正整数的一直角四面体.

取 $z=y-2x$. ③

将③代入②,得 $x^2-7xy+6y^2=0$.

即$(x-y)(x-6y)=0$. ④

从而 $x=6y$,$z=-11y$. ⑤

可见,满足⑤的三个整数 x、y、z 满足③、④和①,从而必满足②和①.

故当三个整数 x、y、z 满足条件⑤时,按上述棱长公式给出的直角四面体的棱长皆为正整数.

取 $y=1$,由⑤得 $x=6$,$z=-11$,代入上述棱长公式得出一直角四面体的一组正整数棱长为 $AB=720$,$AC=132$,$AD=85$,$BC=732$,$CD=157$,$DB=725$.



评注　本题实质上是给出了三直角四面体的一组正整数棱长公式，类似于平面几何中的勾股数组的公式。值得一提的是，在求出 BC、CD、DB 长之后，还需证明任意两条线段之和大于第三条线段，留给读者去证明。

思考交流

思考题1　在单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在棱 AB 上运动，两截面 PA_1D 和 PB_1C 与对角面 A_1B_1CD 所成二面角的大小分别为 α、β，求 $\alpha+\beta$ 的最大值和最小值。

分析　先作出截面 PA_1D 和 PB_1C 与对角面 A_1B_1CD 所成二面角的平面角。由于点 P 在棱 AB 上运动，所以可引入线段参数，然后将 α、β 用这个参数表示，转化为函数的最值问题来解决。

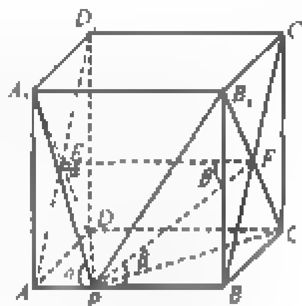


图 15-10

解　设 A_1D 与 AD_1 交于 E，B_1C 与 BC_1 交于 F，连接 EF。

因为 $PA_1=PD$，$PB_1=PC$，且 E、F 分别为 A_1D、B_1C 的中点，所以 $PE\perp A_1D$，$PF\perp B_1C$。

又 $EF\perp$ 面 ADD_1A_1，$EF\perp$ 面 BCC_1B_1，所以 $EF\perp A_1D$，$EF\perp B_1C$。

故 $\angle PEF$、$\angle PFE$ 分别为截面 PA_1D、PB_1C 与对角面 ABC_1D_1 所成二面角的平面角，即 $\angle PEF=\alpha$，$\angle PFE=\beta$。

在平面 ABC_1D_1 内，因为 $EF\parallel AB$，所以 $\angle APE=\angle PEF=\alpha$，$\angle BPF=\angle PFE=\beta$。

设 $AP=x$，则 $PB=1-x(0\leqslant x\leqslant 1)$。

在 $\text{Rt}\triangle PAE$ 和 $\text{Rt}\triangle PBF$ 中，有

$$\tan\alpha=\frac{AE}{AP}=\frac{\sqrt{2}}{2x},\tan\beta=\frac{BF}{PB}=\frac{\sqrt{2}}{2(1-x)},$$

$$\text{从而，}\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2x}+\frac{\sqrt{2}}{2(1-x)}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2x}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2(1-x)}}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2x^2+2x-1}=\frac{\sqrt{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}}.$$

因为 $0\leqslant x\leqslant 1$，所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$\tan(\alpha+\beta)$ 有最小值 $-\frac{4}{3}\sqrt{2}$，即 $(\alpha+\beta)_{\min}=\pi$



$\arctan\frac{4\sqrt{2}}{3}$；当 $x=0$ 或 $x=1$ 时，$(\alpha+\beta)_{max}=\pi-\arctan\sqrt{2}$.

评注 在 $\triangle PEF$ 中，$\angle EPF=180^\circ-(\alpha+\beta)$，$PE=\sqrt{x^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$，$PF=\sqrt{(1-x)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$，$EF=1$，所以本题也可以应用余弦定理求解.

思考题2 已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是凸四边形，其中对角线 AC 与 BD 互相垂直，由顶点 S 向底面所作垂线的垂足 O 恰好是底面对角线的交点．求证：由 O 点向各侧面所作垂线，其四个垂足共圆．

分析 对于比较复杂的空间图形，可以通过分析，找出其关键的平面图形，通过立体图形和平面图形的类比解决问题．由于两个球的交线为圆，因此可以设想，如能证得 M、N、P、Q 同时在两个不同的球面上，即为两球交线时，则问题得以解决．我们注意到，如将底面移出，如图15-12，则 M'、N'、P'、Q' 四点共圆，M'、N'、M、N 亦四点共圆，表明 M、N、M'、N'、P'、Q' 共球．同理亦可证明 M'、N'、P'、Q'、N、P 共球．另外，M'、N'、P'、Q'、P、Q 亦共球．由此可以得出 M、N、P、Q、M'、N'、P'、Q' 共球．因此，M、N、P、Q 共球且该球与 M'、N'、P'、Q' 所在球相交，且 M、N、P、Q 在交线上，命题即得证．

证明 如图15-11，设由 O 点向各侧面作垂线，垂足分别为 M、N、P、Q，连接 SM、SN、SP、SQ，分别交 AB、BC、CD、DA 于 M'、N'、P'、Q'.

因为 $SO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $SO\perp BC$，从而 $ON\perp BC$，有 $BC\perp$ 平面 SON，则 $BC\perp SN'$.

同理，$CD\perp SP'$，$DA\perp SQ'$，$AB\perp SM'$.

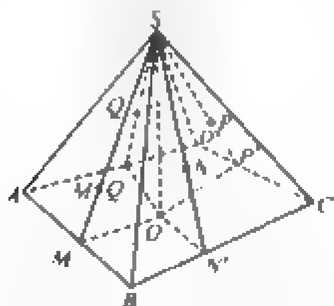


图15-11

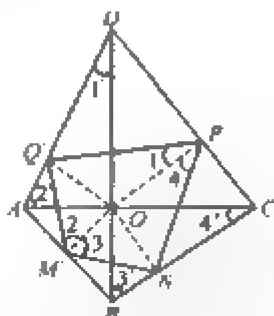


图15-12

将底面移出如图15-12，由 O、P'、D、Q' 四点共圆，得 $\angle 1=\angle 1'$；由 O、Q'、A、M' 四点共圆，得 $\angle 2=\angle 2'$．同理，$\angle 3=\angle 3'$，$\angle 4=\angle 4'$．从而

$$\angle Q'P'N'+\angle Q'M'N'=\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=\angle 1'+\angle 2'+\angle 3'+\angle 4'=180^\circ$$

所以 M'、N'、P'、Q' 四点共圆．

又点 M'、N'、P'、Q' 对 OB 所张的角均为 $90°$，且它们都在平面 SMN 内，所以 M'、N'、M、N 四点共圆。

由 M'、N'、P'、Q' 四点共圆，M'、N'、M、N 四点共圆，知 M、N、M'、N'、P'、Q' 六点共球，不妨设为球 G

同理，M'、N'、P'、Q'、N、P 六点亦共球，不妨设为球 G'；M'、N'、P'、Q'、P、Q 六点亦共球，不妨设为球 G''

从而，球 G'、G'' 都过点 M'、N'、P'、P；球 G'、G 都过点 M'、N'、P'、N

由过不共面的四点，则两球重合 从而 M、N、P、Q、M'、N'、P'、Q' 八点共球

又点 M、N、P、Q 对 SO 所张的角都是 $90°$，所以 M、N、P、Q 四点共球，而该球与球 G 互异，不妨设为球 S 所以 M、N、P、Q 可看作 G、S 两球交线上的点。

于是，M、N、P、Q 四点共圆。

同步检测 15

一、选择题

1. 设 a、b、c 是一个长方体的长、宽、高，且 $a+b-c=1$，已知该长方体的对角线长为 1，且 $a<b$，则高 c 的取值范围是区间…………（　）

A. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{3},1\right)$　　C. $(0,1)$　　D. $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$

2. 若四面体的一条棱长是 x，其余棱长都是 1，体积是 $F(x)$，则函数 $F(x)$ 在其定义域上…………（　）

A. 是增函数但没有最大值　　B. 是增函数且有最大值

C. 不是增函数也没有最大值　　D. 不是增函数但有最大值

3. 现有 A、B、C、D 四个长方体容器，A、B 的底面积均为 a^2，高分别为 a 和 b，C、D 的底面积均为 b^2，高分别为 a 和 $b(a\neq b)$ 现规定一种游戏规则：每人一次从四个容器中取两个（与顺序无关），盛水多者为胜，那么在所有的取法中，必胜的方案有…………（　）

A. 1 种　　B. 2 种　　C. 3 种　　D. 4 种

二、填空题

4. 长方体的长、宽、高分别为 a、b、c，且 $a+b+c=1$，那么以 $\frac{1}{a}-1$、$\frac{1}{b}-1$、$\frac{1}{c}-1$ 为棱长的长方体的体积最小时，其外接球的表面积是______



5. 在直角坐标平面内，由三条直线 $y=3$、$y=-3x+6$ 和 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 所围成的三角形绕 y 轴旋转 $\frac{2}{3}$ 弧度所得到的几何体的体积是______。

6. 将棱长为某正整数的正方体切割成 99 个小正方体，其中 98 个是棱长为 1 的正方体，另一个正方体的棱长也是整数，则它的棱长是______。

三、解答题

7. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，顶点 P 到 AB、BC、CA 的距离分别为 h_1、h_2、h_3，二面角 $P-AB-C$、$P-BC-A$、$P-CA-B$ 的大小分别为 α_1、α_2、α_3，若 α_1、α_2、α_3 均为锐角，且依次成等差数列，h_1、h_2、h_3 依次成等比数列，求证：$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$。

8. （2003 年湖南省高中数学竞赛试题）如图 15-13，已知四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$BC\perp CD$，$CD\perp AB$。

（1）指出与面 BCD 垂直的侧面，并加以证明；

（2）若 $AB=BC=1$，$CD=x$，二面角 $C-AB-B$ 的平面角为 α，$\sin\alpha=f(x)$，求函数 $f(x)$ 的表达式及 α 的取值范围。

A B C D

图 15-13

9. 已知异面直线 a、b 成 60° 角，其公垂线 $EF=2$，长为 4 的线段 AB 的两端点 A、B 分别在直线 a、b 上运动，求 AB 中点 P 的轨迹。

10. 一个棱长为 l 的立方体平放于桌面上，将它由上而下沿水平面切成 n 等分，依次记为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，然后从 a_1 切下一个长、宽分别为 $\frac{2l}{n}$、$\frac{l}{n}$，厚为 $\frac{l}{n}$ 的长方体，它的体积记为 V_1；从 a_2 切下一个长、宽分别为 $\frac{3l}{n}$、$\frac{2l}{n}$，厚仍为 $\frac{l}{n}$ 的长方体，它的体积记为 V_2；从 a_3 切下一个长、宽分别为 $\frac{4l}{n}$、$\frac{3l}{n}$，厚仍是 $\frac{l}{n}$ 的长方体，它的体积记为 V_3；如此继续下去，……。

（1）求 $V_k\ (1\leqslant k<n)$；

（2）求 $\sum\limits_{k=1}^{n-1}V_k$；

（3）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}V_k$。

参考答案

第1讲　平面与空间直线

一、选择题

1. D [illegible] 当平面α经过直线l时，交线只有l这1条；当平面α不经过直线l时，交线有[illegible]条. 若β∥γ，则α与β、γ各有1条交线.

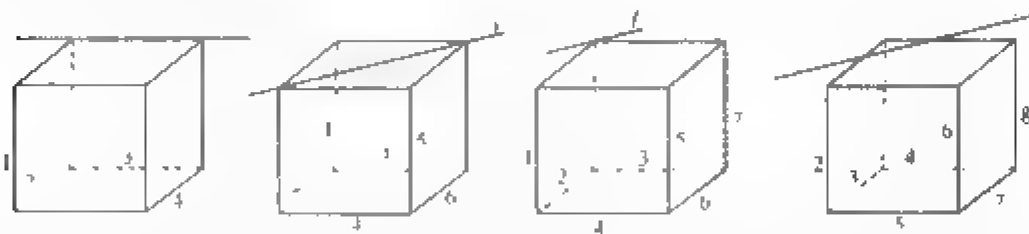
[illegible] 在同一平面内，则点[illegible]在α外，从而，点C与直线l和AB各确定一个平面，连同α在内，共有3个平面.

[illegible] 平面ABC[illegible]平面ACD，故点P在平面ABC与平面ACD的交线AC上.

[illegible] 平面[illegible]，所以根据三垂线定理的逆定理，有[illegible]直径的圆上. 因此，直线[illegible]为直径的圆有公共点，故[illegible]，即长方体高的最小值为2a.

[illegible] 若a、b是异面直线，它们在平面α内的射影也可能相交或平行，从而可排除A. 长方体ABCD[illegible]中，直线[illegible]在平面ABCD上的射影互相垂直，而直线[illegible]不垂直，从而可删除C. 故应选D.

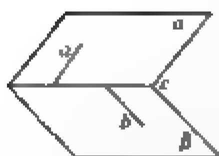
6. B. 如下图.



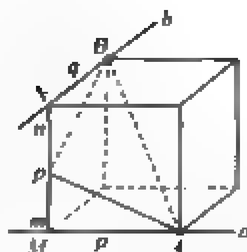
（第6题）

[illegible] 如图，a、b是异面直线，[illegible]均固定，故命题Ⅰ不正确. 又可以取无穷多个平行平面，在每个平面上各取一条直线，且使这些直线两两的[illegible]，则这些直线中的任意两条都是异面直线，从而命题[illegible]不正确.





（第 7 题）



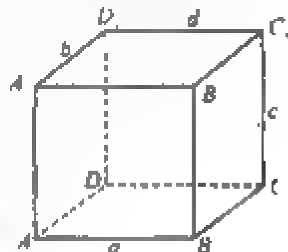
（第 8 题）

8. C　以 $MA=p$，$NB=q$，$MN=m+n$ 为长、宽、高构造长方体如图所示，则 $PA^2=p^2+m^2$，$PB^2=q^2+n^2$，$AB^2=p^2+q^2+(m+n)^2$．从而 $PA^2+PB^2-AB^2=-2mn<0$，故 $\angle APB>90^\circ$，即 $\triangle PAB$ 是钝角三角形．

二、填空题

9. 7　构造四面体 $ABCD$，可分两类．(1) 若取 AB、AC、AD 的中点，这三个中点确定的平面满足要求．类似地还可以得到 3 个平面．(2) 若取 AB、AC、DB、DC 的中点，这四个中点确定的平面也满足要求，类似地还可以得到 2 个平面．综上所述，共有 $4+3=7$ 个平面．

10. 必要不充分　若 a、b 是异面直线，则 a 与 b 不平行；若 a、b 是相交直线，则 a 与 b 不是异面直线．

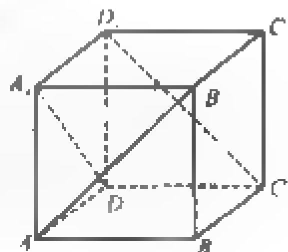


（第 11 题）

11. 平行．构造长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 如图所示，使棱 AB 在 a 上，A_1D_1 在 b 上，CC_1 在 c 上，则 b、c 的公垂线 d 为 C_1D_1，显然有 $d\,/\!/\,a$．

12. 共线　因为 $AC\,/\!/\,BD$，所以直线 AC 与 BD 确定一个平面 β，从而点 O、C、$D\in\beta$．又 O、C、$D\in\alpha$，所以点 O、C、D 在平面 α 与 β 的交线上，故 O、C、D 三点共线．

13. $2+\sqrt{2}$　根据平面图形斜二测直观图的画法，所求平面图形为四边形；由"横不变"知，这个四边形为梯形，且上底边长为 1，容易求得下底边长为 $1+\sqrt{2}$；又由直观图的一个底角为 45°知，这个梯形为直角梯形；再由"竖取半"知，直腰长为 2．故这个直角梯形的面积为 $\frac{1}{2}\times[1+(1+\sqrt{2})]\times 2=2+\sqrt{2}$．



（第 15 题）

14. 一个平面共线或两个平行且都与第三个相交　按三个平面交线的条数可分四类：(1) 没有交线，则这三个平面互相平行，它们将空间分成 4 部分，不符合要求；(2) 有一条交线，则这三个平面将空间分成 6 部分；(3) 有 2 条交线，则其中两个平行且都与第三个相交，它们将空间分成 6 部分；(4) 有 3 条交线，又可分为 3 条交线平行和 3 条交线共点两种情况．当 3 条交线互相平行时，它们将空间分成 7 部分；当 3 条交线共点时，它们将空间分成 8 部分．这些都不符合要求．

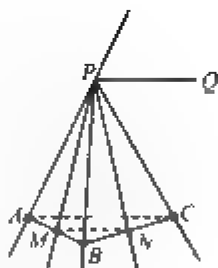
15. 4　如图，取 AB_1、BC_1、CD_1、DA_1，显然两两异面，所以 $n\geq 4$．又所求异面直线与正方体表面的交点两两不同，且最多有 8 个，故 $n=4$．

16. 6　由于 4 个点最多可以构成两组平行直线，但 4 个点可连成 6 条不同的线段，因此 M 中 4 个点不符合要求（如若 $AB\,/\!/\,CD$，则对于点 A、C，M 中不存在两点连线使得它与 AB 平行）．由于 6 个点最多可构成 6 组平行线（如正三棱柱），但 6 个点可连成 15 条不同的线段，因此 M 中 6 个点也不符合要求．



三、[illegible]

17. 如图，在射线 PA、PB、PC 上分别取点 A、B、C，使 $PA=PB=PC$。设 $\angle APB$、$\angle BPC$ 的平分线与 AB、BC 分别相交于点 M、N，$\angle CPA$ 的邻补角的平分线为 PQ。连接 MN，则 $MN\parallel AC$。



（第 17 题）

又因为 PQ 为等腰 $\triangle PAC$ 的顶角的邻补角的平分线，所以 $PQ\parallel AC$。

从而，$PQ\parallel MN$，即 QP 与 MN 共面。

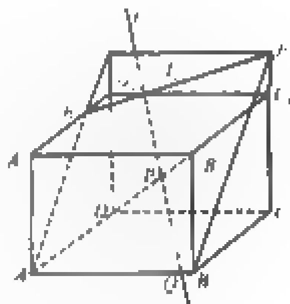
故 PM、PN、PQ 三线共面。

18. 由于 $P\notin a$，$P\notin b$，所以由点 P 与直线 a、b 分别可确定一个平面 α、β。由于两个平面 α、β 有一个公共点 P，所以它们有且只有一条经过 P 点的公共直线 l（公理 2）。

(1) 当 $l\nparallel a$，且 $l\nparallel b$ 时，l 就是合乎要求的直线，且唯一。

(2) 当 $l\parallel a$，或 $l\parallel b$ 时，过点 P 且与 a、b 都相交的直线是不存在的。

19. ［证法 1］如图，过 AB 作一平面 α，与 A_1D_1 交于 E，与 CC_1 交于 F，与 DB_1 交于 P，连接 EF，记为 l，则直线 EF 与点 P 及直线 AB 均在平面 α 上。


（第 19 题）

在 α 上过点 P 可以作无穷多条直线 PQ 同时与 EF 相交，与 AB 交于 Q，记 PQ 为 l。

故这样的相交直线 l_1、l_2 有无穷多对。

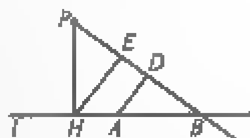
［证法 2］连接 BD_1，记 BD_1 与 DB_1 的交点为 O，则 BD_1 与 AB 和 A_1D_1 均相交，记 BD_1 为 l_1。

再在 CC_1 上任取一点 M，连接 D_1M（或 BM，OM 均可），记为 l_2，则这样的 l_2 有无穷多条。

从而，满足条件的相交直线有无穷多对。

20. 由于 n 个点不共面，因此也不共线。下面证明，必存在一条直线，恰好通过其中的两个点。

n 个点作两两连线，最多有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条，每条直线外的点到直线的距离中必有最小的（由于只有有限个距离）。记距离取最小值时所对应的直线为 l，并设 P 点到直线 l 的距离 PH 为最小距离。如图所示，下面证明 l 恰好过两个已知点。



（第 20 题）

若不然，则 l 上至少有 3 个已知点，其中必有 2 个点在 H 的同侧，不妨设为 A 和 B，且 $0\le HA<HB$。连接 PB，作 $AD\perp PB$ 于 D，$HE\perp PB$ 于 E，则有 $AD\le HE<PH$，即存在点 A 到直线 PB 的距离小于 PH，这与 PH 的最小性矛盾，故 l 恰好通过两个已知点。

此时 l 之外还有 $n-2$ 个已知点，每个点与 l 可以确定一个平面，最多可以确定 $n-2$ 个平面，但通过 l 可以作无穷多个平面，故去掉 $n-2$ 个平面后，还有无穷多个平面通过直线 l，它们中的每一个平面恰好通过两个已知点（l 上的两个已知点）。



第 2 讲　直线与平面的位置关系

一、选择题

1. D. 设 a、b 确定的平面为 β，当 β 与 α 平行时，由 $b\subset\beta$ 得 $b\,//\,\alpha$；当 β 与 α 相交时，设交线为 l，则由 $a\,//\,\alpha$ 得 $a\,//\,l$. 又在平面 β 内，b 与 a 相交，则 b 与 l 也相交，从而 b 与平面 α 相交. 综上所述，$b\,//\,\alpha$ 或 b 与 α 相交.

2. A. 因为 $D_1D\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $D_1D\perp AD$，$D_1D\perp BD$. 又 $AB\perp$ 平面 ADD_1A_1，所以 $AB\perp AD$，$AB\perp AD_1$，故四面体 D_1-ABD 的四个面都是直角三角形，它的直度为 $\frac{4}{4}=1$.

3. B. 根据线面垂直的判定定理和性质定理，①、④两个命题都正确. 由 $a\perp b$ 及 $a\,//\,\alpha$ 知，b 可能在 α 内，也可能与 α 平行，还可能与 α 相交，因此 ② 不正确. 由 $a\perp b$ 及 $a\perp\alpha$ 知，b 可能在 α 内，所以 ③ 也不正确.

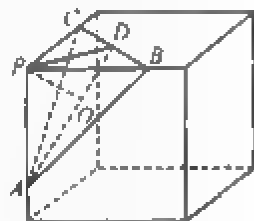
4. C. 对于 A，若过 a 所作平面与 b 垂直，那么必有 $b\perp a$，但条件仅是 a、b 为异面直线，所以 A 不正确. 对于 B，由条件推出 b 可能与 α 相交，排除 B. 对于 D，若存在一个与两条异面直线都平行的平面，那么必存在无数多个与这两条异面直线都平行的平面，这些平面互相平行，故 D 也不正确. 从而本题应选 C.

5. C. 按直角顶点分四类：① 以 A 为直角顶点的直角三角形有 4 个；② 以 B 为直角顶点有 2 个；③ 以 D 为直角顶点也有 2 个；④ 以 C 为直角顶点的有 1 个. 故共有 $4+2+2+1=9$(个).

6. D. 根据垂直的不变性，有 $PD\perp PE$，$PD\perp PF$，所以 $PD\perp$ 平面 PEF.

7. A. 因为平面 α 外一点到四边形 $ABCD$ 各顶点的距离相等，所以该点在平面 α 上的射影 O 到四边形 $ABCD$ 各顶点的距离也相等.

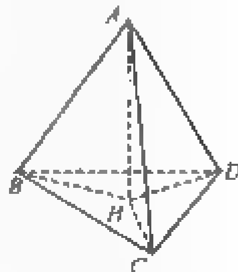
从而 O 为四边形 $ABCD$ 的外心，故四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形.



(第 8 题)

8. B. 首先给出一个性质：若直角三角形的两直角边为 a、b，斜边上的高为 h，则有 $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$. 如图，连接 AO 并延长交 BC 于 D，连接 PD. 由 $PA\perp$ 平面 PBC，得 $PA\perp BC$，$PA\perp PD$. 又由 $PO\perp$ 平面 ABC 及三垂线定理，得 $AD\perp BC$，进而 $PD\perp BC$. 根据前面的性质，在 $\mathrm{Rt}\triangle BPC$ 中，有 $\frac{1}{PD^2}=\frac{1}{PB^2}+\frac{1}{PC^2}$；在 $\mathrm{Rt}\triangle APD$ 中，有 $\frac{1}{PO^2}=\frac{1}{PA^2}+\frac{1}{PD^2}$. 代入得 $\frac{1}{PO^2}=\frac{1}{PA^2}+\frac{1}{PB^2}+\frac{1}{PC^2}$，即 $M=N$.

二、填空题



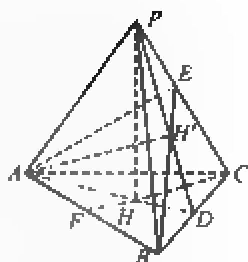
(第 9 题)

9. $AC\perp BD$. 如图，作 $AH\perp$ 平面 BCD，垂足为 H，连接 BH、CH、DH. 因为 $CD\perp AB$，所以 $CD\perp BH$. 同理 $BC\perp DH$，故 H 为 $\triangle BCD$ 的垂心. 从而 $BD\perp CH$. 又 $AH\perp$ 平面 BCD，所以 $BD\perp AC$.

10. $[2,+\infty)$. 连接 AQ. 因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$DQ\perp PQ$，所以 $DQ\perp AQ$，即 $\angle AQD=90°$. 故 Q 是以 AD 为直径的圆与 BC 边的公共点，从而 $BC=AD\geqslant 2AB$，即 $a\geqslant 2$.

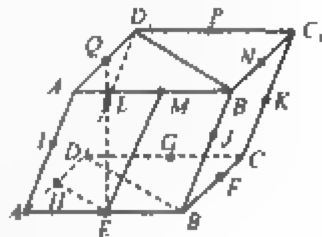
11. $\sqrt{5}$. 设点 A 在 β 上的射影为 C，则 $C\in l$. 因为点 A 在 β 上的射影与点 B 在

α 上的射影重合，所以点 B 在 α 上的射影也是 C，则 $C\in\alpha$. 从而 $C\in l$. 又 $AC\perp\beta$，$PB\perp\beta$，所以 $AC\parallel PB$. 由此可知，四边形 $ACBP$ 为矩形. 故 P 点到直线 l 的距离为 $PC=\sqrt{5}$.



(第 12 题)

12. 垂心. 如图，设 P 点在平面 ABC 上的射影为 H，则 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，连接 AH 并延长交 BC 于 D，则 $AD\perp BC$，连接 PD，过 B 作 $BE\perp PC$ 于 E，交 PD 于 H'. 下面证明 $AH'\perp$ 平面 PBC. 因为 $PH\perp$ 平面 ABC，所以 $BC\perp PH$. 又 $BC\perp AD$，所以 $BC\perp$ 平面 PAD，从而 $BC\perp AH'$. 连接 CH 并延长交 AB 于 F，因为 $PH\perp$ 平面 ABC，$CF\perp AB$，所以 $AB\perp PC$. 又因为 $BE\perp PC$，所以 $PC\perp$ 平面 EAB，从而 $PC\perp AH'$，故 $AH'\perp$ 平面 PBC.



(第 15 题)

13. 直角三角形. 因为 $PA\perp$ 平面 ABC，所以 $PA\perp BC$. 又 $AC\perp BC$，所以 $BC\perp$ 平面 PAC，从而 $BC\perp AM$. 又 $AM\perp PC$，所以 $AM\perp$ 平面 PBC，故 $AM\perp MN$，即 $\triangle AMN$ 为直角三角形.

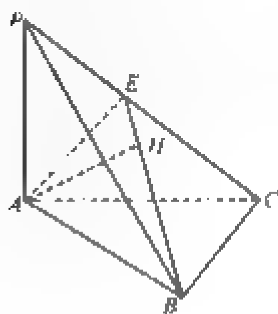
14. 4个. 因为 $PA\perp$ 平面 ABC，$BC\perp AC$，所以 $BC\perp PC$. 又由 $PA\perp$ 平面 ABC，得 $PA\perp AB$，$PA\perp AC$. 故 $\angle PAB=\angle PAC=\angle ACB=\angle PCB=90^\circ$.

15. 12条. 如图，易证 FH，EM，EQ 均与平面 BDD_1B_1 平行，由对称性知，这样的直线各有 4 条. 故符合题意的直线共有 $3\times 4=12$(条).

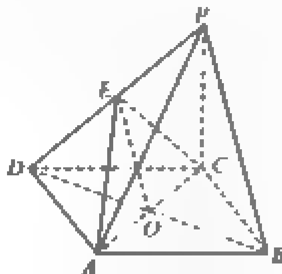
16. ①、③. 由例 3 的结论知，$MN\parallel$ 平面 $ABCD$，所以③正确. 又因为 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $AA_1\perp MN$，则①也正确. 易知，当且仅当 M、N 分别为 AB_1、BC_1 的中点时，$MN\parallel A_1C_1$，因此②、④都不正确.

三、解答题

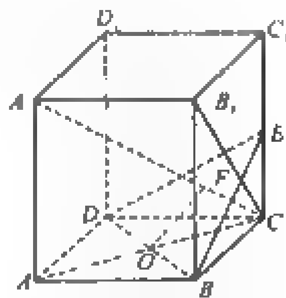
17. 如图，假设 H 为 $\triangle PBC$ 的垂心，连接 BH 并延长交 PC 于 E，则 $PC\perp EH$. 因为 $AH\perp$ 平面 PBC，所以 $PC\perp AE$(三垂线定理)，从而 $PC\perp$ 平面 ABE，有 $PC\perp AB$. 又因为 $PA\perp$ 平面 ABC，所以 $AB\perp AC$(三垂线定理的逆定理)，即 $\triangle ABC$ 为直角三角形，这与已知矛盾. 故 H 不可能是 $\triangle PBC$ 的垂心.



(第 17 题)



(第 18 题)



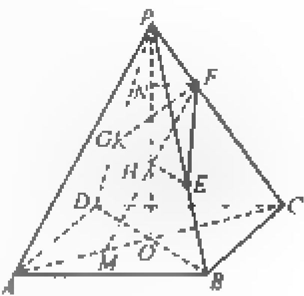
(第 19 题)

18. (1) 因为 $PC\perp$ 平面 $ABCD$，所以 BC 是 PB 在平面 $ABCD$ 上的射影. 又 $AC\perp BC$，所以 $AC\perp PB$.



(2) 如图，连接BD交AC于O点，则O为BD的中点，又E为PD的中点，所以$PB \parallel OE$。因为$PB \not\subset$平面ACE，$OE \subset$平面ACE，所以$PB \parallel$平面ACE。

19. (1) 因为$BE \perp B_1C$，$A_1B_1 \perp$平面BCC_1B_1，所以$BE \perp A_1C$（三垂线定理）。又因为$BD \perp AC$，$A_1A \perp$平面$ABCD$，所以$BD \perp A_1C$，故$A_1C \perp$平面BDE。



（第20题）

(2) 如图，设正方形$ABCD$的中心为O，A_1C交平面BDE于F。由(1)知$A_1C \perp$平面BDE，所以$A_1C \perp OF$。由$\mathrm{Rt}\triangle OFC \backsim \mathrm{Rt}\triangle A_1AC$，得$\frac{CF}{AC}=\frac{OC}{A_1C}$。又因为$CF=\frac{1}{4}A_1C$，所以$\frac{1}{4}A_1C^2=AC\cdot OC$，将$A_1C^2=2a^2+b^2$，$AC=\sqrt{2}a$，$OC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，代入得$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$。

20. 如图，因为$\frac{PE}{PB}=\frac{2}{3}$，所以$\frac{PE}{EB}=2=\frac{PG}{GD}$，则$EG \parallel BD$，从而$\triangle FEG$为等腰三角形，$EG$与$PO$的交点$H$为$EG$的中点。在平面$PAC$内，连接$FH$延长交$AC$于$M$。

因为$EG \parallel BD$，所以$\frac{PH}{HO}=2$。取PH的中点N，则$OM=FN$。又$\frac{FN}{OC}=\frac{PF}{PC}=\frac{1}{3}$，所以$\frac{OM}{OC}=\frac{1}{3}$，即$\frac{CM}{AC}=\frac{2}{3}$。又$\frac{CF}{CP}=\frac{2}{3}$，所以$\frac{CF}{CP}=\frac{CM}{CA}$，有$FM \parallel PA$，故$PA \parallel$平面$EFG$。

第3讲　平面与平面的位置关系

一、选择题

1. B. 因为$l \perp \alpha$，$\alpha \parallel \beta$，所以$l \perp \beta$，又因为$m \subset \beta$，所以$l \perp m$，故①正确；若$l \perp m$，$m \subset \beta$，则l不一定垂直于β，又因为$l \perp \alpha$，所以α与β不一定垂直，故②不正确；由$l \perp \alpha$，$\alpha \perp \beta$知，$l \parallel \beta$或$l \subset \beta$，又因为$m \subset \beta$，所以l与m不一定垂直，因此③不正确；由$l \perp \alpha$，$l \parallel m$知，$m \perp \alpha$，又因为$m \subset \beta$，故$\alpha \perp \beta$，④正确。

2. D. 若$\alpha \perp \gamma$，$\beta \perp \gamma$，则α与β可能平行，也可能相交，因此A不正确；对于B，若三点不在β的同一侧，则α与β相交，故B不正确；对于C，若$l \parallel m$，则α与β不一定平行，从而C也不正确。只有D正确（为什么？留给读者去证明）。

3. C. 因为$m \parallel n$，$n \perp \beta$，所以$m \perp \beta$，又因为$m \subset \alpha$，所以$\alpha \perp \beta$（本题还可以用排除法去判断）。

4. B. $m \perp \beta$和$n \perp \alpha$中至少有一个成立。若不然，设$\alpha \cap \beta = l$，则由$m \perp n$知，m、n中至少有一条与l相交。不妨设$m \cap l = P$，由$\alpha \perp \beta$知，m在β内的射影为l，又因为$n \perp m$，所以$n \perp l$，从而$n \perp \alpha$，与假设矛盾。故$m \perp \beta$和$n \perp \alpha$中至少有一个成立。

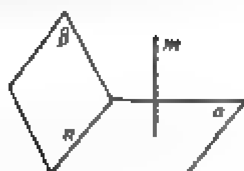
5. B. A的反例如图①，$\alpha \cap \beta = n$，$m \perp \alpha$，但α与β不垂直。

C的反例如图②，$\alpha \perp \beta$，$m \perp \alpha$，$n \parallel \beta$，则$m \parallel n$。

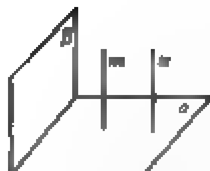
D的反例如图③，$\alpha \perp \beta$，$\alpha \cap \beta = m$，$n \perp m$，则$n \parallel \beta$。

事实上，若$\alpha \parallel \beta$，$m \perp \alpha$，则$m \perp \beta$，又因为$n \parallel \beta$，所以$m \perp n$，故B正确。

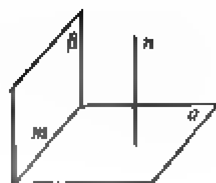




①



②



③

（第5题）

6. C ②、③、④都正确（通过画图容易做出判断），①不正确（由题设，可能有 $n\subset\alpha$ 或 $n\subset\beta$）

7. A. 若 $l\subset\alpha$，$\alpha/\!/\beta$，过 l 作平面 γ，使 $\gamma\cap\beta=l'$，则 $l/\!/l'$，故 $l/\!/\beta$. 反之，若 $l\subset\alpha$，$l/\!/\beta$，则 α 可能与 β 相交

8. D. 甲的反例如图①，$\alpha\cap\beta=l$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，且 $m/\!/l$，$n\cap l=P$，则 n 与 α 不平行



①



②

（第8题）

乙的反例如图②，$l=\alpha\cap\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，且 $m\perp l$，$n\perp l$（$l=\alpha\cap\beta$），则 $m/\!/\beta$

二、填空题

9. 平行或在平面内

10. 1个 可用反证法证明

11. ②、④ 对于①，在交线 m 上任取一点 P，过 P 作平面 $\gamma\perp m$，当 $n\subset\gamma$ 时，都有 $n\perp m$，由 n 的任意性，n 可能与 α，β 都不垂直，因此①不正确. ②就是面面平行的性质定理. 对于③，设 $l\subset\alpha$，且 l 与 m 在 α 内的射影垂直，则 $m\perp l$，但对 α 内无数条和 l 平行的直线，它们都与 m 垂直，因此③不正确. 对于④，设 $l\subset\alpha$，且 $l/\!/m$，则由 $n/\!/m$，得 $n/\!/l$，从而 $n/\!/\alpha$，同理 $n/\!/\beta$

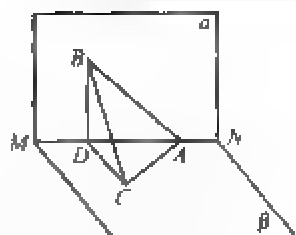
12. 26cm. 依题意，以 AB、AC、BD 为长、宽、高作长方体，则 C、D 两点间的距离即为该长方体的对角线长，故 $CD=\sqrt{6^2+8^2+24^2}=26(\text{cm})$.

13. 9 或 $\frac{18}{5}$ 根据面面平行的性质，有 $AC/\!/BD$. 从而 $\frac{AC}{BD}=\frac{PA}{PB}$，即 $AC=\frac{6\times12}{PB}$. 若点 P 在 α，β 之间，则 $PB=AB-PA=8$，故 $AC=\frac{6\times12}{8}=9$；若 P 不在 α，β 之间，则 $PB=PA+AB=20$，故 $AC=\frac{6\times12}{20}=\frac{18}{5}$

14. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 因为 $\alpha/\!/\beta$，所以 $AB/\!/A'B'$，$BC/\!/B'C'$，$CA/\!/C'A'$，从而 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，则 $\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2=\left(\frac{OA'}{OA}\right)^2=\frac{4}{9}$，即 $S_{\triangle A'B'C'}=\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$. 又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $S_{\triangle A'B'C'}=$



$\frac{4}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$



（第15题）

15. 60° 如图，不妨设 $AB=AC=1$，过 B 作 $BD\perp MN$，垂足为 D，连接 CD，则 $BD\perp\beta$，从而 $BD\perp CD$，且 $BD=AD=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理，得 $CD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $BC=1$，故 $\angle BAC=60^\circ$.（若利用"三余弦"定理，立得 $\cos\angle BAC=\cos45^\circ\cdot\cos45^\circ=\frac{1}{2}$，即 $\angle BAC=60^\circ$）

16. 平行 若 $a\perp l$，$b\perp l$，则 $a\parallel b$，所以 a，b 可能平行. 若 a，b 中至少有一条与 l 不平行，根据三垂线定理的逆定理，若 $a\perp b$，则 $a\perp l$，这与题设矛盾，故 a，b 不可能垂直. 综上所述，a，b 不可能垂直，但可能平行.

三、解答题

17. 因为 $\alpha\parallel\beta$，且平面 $ACD\cap\beta=BN$，所以 $BN\parallel AD$.

同理 $EM\parallel AD$.

所以 $BN\parallel EM$.

同理可证，$BM\parallel EN$.

故四边形 $BMEN$ 是平行四边形.

18. 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos60^\circ=3a^2$.

所以 $AB^2+AC^2=4a^2=BC^2$，故 $\triangle ABC$ 为直角三角形，即 $AB\perp AC$.

因为 $CD\parallel AB$，所以 $CD\perp AC$.

又因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $CD\perp PA$.

从而 $CD\perp$ 平面 PAC.

故平面 $PCD\perp$ 平面 PAC.

19. (1) 因为 $A_1C_1=B_1C_1$，M 为 A_1B_1 的中点，所以 $A_1B_1\perp C_1M$.

又因为 $AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $A_1A\perp C_1M$.

故 $C_1M\perp$ 平面 AA_1B_1B.

(2) 因为 $C_1M\perp$ 平面 AA_1B_1B，所以 $C_1M\perp A_1B$.

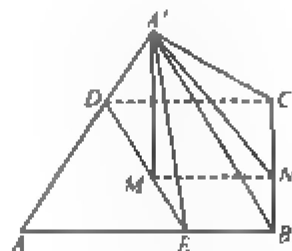
又因为 $AC_1\perp A_1B$，所以 $A_1B\perp$ 平面 AMC_1.

故 $A_1B\perp AM$.

(3) 因为 $AM\parallel B_1N$，所以 $AM\parallel$ 平面 NB_1C_1.

又因为 $C_1M\parallel C_1N$，所以 $C_1M\parallel$ 平面 NB_1C_1.

故平面 $AMC_1\parallel$ 平面 NB_1C_1.



（第20题）

20. 如图，分别取 DE，BC 的中点 M，N，连接 $A'M$，MN，$A'N$.

因为 $AD=AE$，所以 $A'D=A'E$，从而 $A'M\perp DE$.

又因为 $A'B=A'C$，所以 $A'N\perp BC$.



因为 $MN\perp BC$，所以 $BC\perp$ 平面 $A'MN$，则 $A'M\perp BC$.

显然 DE 与 BC 相交（否则 $A'B<A'C$，与 $A'B=A'C$ 矛盾）.

从而 $A'M\perp$ 平面 $BCDE$，故平面 $A'DE\perp$ 平面 $BCDE$.

第4讲　空间向量及其应用

一、选择题

1. 因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$，$\overrightarrow{A_1E}=\frac{1}{4}\overrightarrow{A_1C_1}$，所以 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1E}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$.

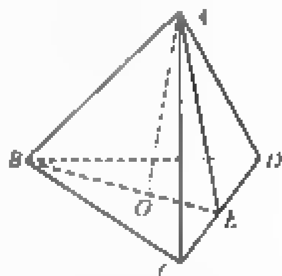
由于 $\overrightarrow{AA_1}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$ 是不共面的向量，所以上述分解式是唯一的，故 $x=1$，$y=\frac{1}{4}$.

2. A. 设 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}+\gamma\overrightarrow{AD}$（$\alpha,\beta,\gamma\in R$），则 $\overrightarrow{AP}=$ [illegible]，因此，$10\alpha=2$，[illegible]，联立解得 $\alpha=\frac{1}{5}$，$\beta=\frac{1}{10}$，$\gamma=$ [illegible]，可见，α、β、γ 均为正数，且 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{7}{10}<1$，故点 P 在四面体 $ABCD$ 的内部.

3. B. 依题意，设 $Q(0,y,z)$，则 $\overrightarrow{PQ}=(-2,y+3,z-5)$，由 $\overrightarrow{PQ}\parallel\vec{a}$ 知，存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\vec{a}$，即 $(-2,y+3,z-5)=\lambda(-2,1,-2)$，所以 $-2=-2\lambda$，$y+3=\lambda$，$z-5=-2\lambda$，得 $y=-2$，$z=3$，即 $Q(0,-2,3)$.

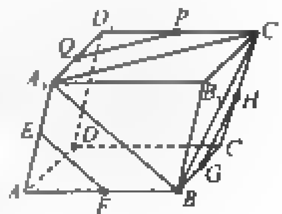
4. C. 如图，取 CD 的中点 E，若 O 为 $\triangle BCD$ 的重心，则 $\overrightarrow{BO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，因此，$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$. 反之，若 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA})$，

所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})$，从而 $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$，因此，点 O 在中线 BE 上，且点 O 分 BE 的比为 $2:1$，故 O 为 $\triangle BCD$ 的重心. 综上所述 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$ 是 O 为 $\triangle BCD$ 重心的充要条件.



（第4题）

5. A. 如图，因为 E、F 分别是 A_1A、AB 的中点，所以 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B}$，同理 $\overrightarrow{GH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC_1}$，$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1A_1}$，故 $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{C_1A_1})=\vec{0}$.



（第5题）



6. A 如图，因为 E、F 分别是 BC、AD 的中点，所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD})$，从而 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}=$ … $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ … 又 $ABCD$ 是棱长为1的正四面体，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$ … $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=1\times1\times\cos 60°=\frac{1}{2}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2=1$，故 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}(-\frac{1}{2}+0-\ldots-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$。

（第6题）

7. B 如图，C 是第一卦限内的单位正方体，它被平面 … 所分成 … 部分，再用平面 … 去切时，其中的两部分又 … 分为 … 故正方体C被三个平面 $x=y$，$y=z$，$z=x$ 切成6部分。

（第7题）

8. C 由 … 得 … 则 $\overrightarrow{AQ}=$ … $\overrightarrow{AB}+$ … $\overrightarrow{AC}+$ … $\overrightarrow{AD}$ … $k(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})+\mu\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AP}+\mu\overrightarrow{AD}$，所以 A、P、Q、D 四点共面，结合 A、P、Q、D 四点的位置关系可知，线段 AQ 与 DP 必相交。

二、填空题

9. $(0,4,0)$。因为点 A 关于 x 轴的对称点为 $A_1(1,-2,1)$，点 A 关于平面 xOy 的对称点为 $A_2(1,2,1)$，所以 $B(1,-2,1)$，$C(1,2,1)$，于是 $\overrightarrow{BC}=(0,4,0)$。

10. $(1,1,1)$ 或 $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$。设 $D(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{DB}=(-x,1-y,-z)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{DC}=(-x,-y,1-z)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{DA}=(1-x,-y,-z)$，$\overrightarrow{BC}=$ … 由 … 得 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{BC}|$，即 $x-z=0$，$x-y=0$，$(1-x)^2+y^2+z^2=2$，联立解得 $x=y=z=1$ 或 $x=y=z=-\frac{1}{3}$。

11. $3\sqrt{2}$。因为 $a\cdot(a+b+c)=0$，即 $|a|^2+a\cdot b+c\cdot a=0$，所以 … 同理 … 故 $|a+b+c|=$ …

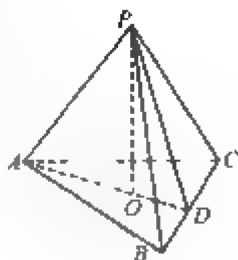
12. $4x+3y+6z-12=0$。因点 P 在平面 ABC 内部，存在实数 λ、μ 使得 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，由 $\overrightarrow{AP}=(x-3,y,z)$，$\overrightarrow{AB}=(-3,4,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-3,0,2)$，得 $(x-3,y,z)=(-3\lambda-3\mu,4\lambda,2\mu)$，所以 $x-3=-3\lambda-3\mu$，$y=4\lambda$，$z=2\mu$，消去 λ、μ，得 $4x+3y+6z-12=0$。

13. $PA\perp$ 平面 $ABCD$。因为 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=$ … $=0$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}=-1\times1+2\times2+(-1)\times0=0$，所以 $AP\perp AB$，$AP\perp AD$，故 $PA\perp$ 平面 $ABCD$。

14. $(\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{3})$。设 $M(\ldots,a,a)$，$N(b,1,1-b)$，则 $\overrightarrow{MN}=$ … 因为 MN 是异面直线 AB 与 BC' 的公垂线段，且 $\overrightarrow{AB}=(0,1,\ldots)$，$\overrightarrow{BC'}=(-1,0,1)$，所以 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC'}=0$，即 … 联立解得 $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{2}{3}$，故 $\overrightarrow{MN}=(\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{3})$。



15. $\overrightarrow{DC}$ 因为$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$,所以$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{DC}$.



(第16题)

16. $\frac{1}{3}(a+b+c)$ 如图,延长AO交BC于D,则D为BC的中点,从而$\overrightarrow{PD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=\frac{1}{2}(b+c)$.

故$\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=\frac{1}{3}(a+b+c)$.

三、解答题

17. (1) 如图,因为$AB=AC$,$DB=DC$,所以$\triangle ABD\cong\triangle ACD$,有$\angle BAD=\angle CAD$,从而$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$,故$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$,即$AD\perp BC$.

(2) 因为E、F、G、H分别为AB、AC、CD、DB的中点,所以$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,故四边形$EFGH$为平行四边形.

又$\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{FH}=(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG})\cdot(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EH})=(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})\cdot(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{BC}^2)=0$,所以$EG\perp FH$.

18. 建立空间直角坐标系如图所示,则$D(0,0,0)$,$M(0,1,\frac{1}{2})$,$N(\frac{1}{2},1,0)$,$P(0,\frac{1}{2},0)$,$A_1(1,0,1)$.

于是$\overrightarrow{DM}=(0,1,\frac{1}{2})$,$\overrightarrow{DN}=(\frac{1}{2},1,0)$,$\overrightarrow{A_1P}=(-1,\frac{1}{2},-1)$.

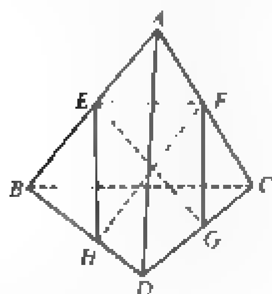
因为$\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{DM}=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$,

$\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{DN}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=0$,

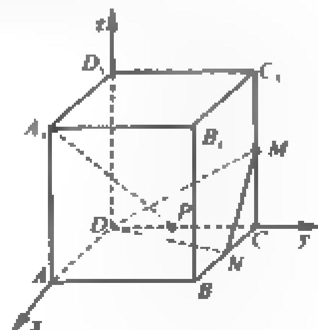
所以$A_1P\perp DM$,$A_1P\perp DN$.

故$A_1P\perp$平面DMN.

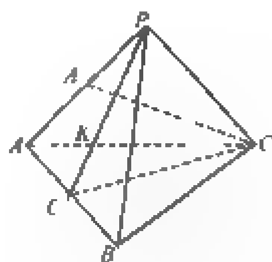
19. 设过PB、BC、PC及其对棱中点的平面分别为α_{PB}、α_{BC}、α_{PC},K为它们的交点,记A'、C'分别为PA、AB的中点,取P为原点,记$\overrightarrow{PK}=\lambda_1\overrightarrow{PA}+\lambda_2\overrightarrow{PB}+\lambda_3\overrightarrow{PC}$.



(第17题)



(第18题)



(第19题)



因为 $K\in\alpha_{PC}$，所以$\overrightarrow{PK}\cdot(\overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{PC'})=0$，即

$(\lambda_1\overrightarrow{PA}+\lambda_2\overrightarrow{PB}+\lambda_3\overrightarrow{PC})\cdot[\overrightarrow{PC}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})]$

$=[(\lambda_1\overrightarrow{PA}+\lambda_2\overrightarrow{PB}+\lambda_3\overrightarrow{PC})\times\overrightarrow{PC}]\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$

$=\frac{1}{2}\lambda_1(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PB})+\frac{1}{2}\lambda_2(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PA})$

$=\frac{1}{2}(\lambda_2-\lambda_1)(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC})=0.$

而$(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC})\neq 0$，所以$\lambda_1=\lambda_2$。

同理，由 $K\in\alpha_{PB}$，得 $\lambda_2=\lambda_3$，故$\overrightarrow{PK}=\lambda(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$。

又 $K\in\alpha_{A}$，可设$\overrightarrow{A'K}=\mu_1\overrightarrow{A'C}+\mu_2\overrightarrow{A'B}$，注意到$\overrightarrow{A'K}=\overrightarrow{A'P}+\overrightarrow{PK}$，有

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}+\lambda(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=\mu_1\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}\right)+\mu_2\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right).$$

所以$\begin{cases}\lambda=\mu_1=\mu_2,\\ \lambda-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2),\end{cases}$ 解得 $\lambda=\frac{1}{4}$

即$\overrightarrow{PK}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$。

同理可证，其他平面的交点也满足上式

故这些平面共点于 K

20 (1) 由已知 $\triangle PAB$，$\triangle PBC$，$\triangle PCA$ 均为直角三角形，所以 $AB^2=PA^2+PB^2$，$BC^2=PB^2+PC^2$，$CA^2=PC^2+PA^2$

从而 $AB^2+BC^2=PA^2+2PB^2+PC^2>PA^2+PC^2=CA^2$，

同理可证，$BC^2+CA^2>AB^2$，$CA^2+AB^2>BC^2$，

故 $\triangle ABC$ 为锐角三角形

(2) 因为$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB})=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，所以 $PH\perp BC$，

同理可证，$PH\perp AB$

因此，$PH\perp$ 平面 ABC

由$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$ 是空间不共面的三个向量知，存在实数 k_1，k_2，k_3，使得$\overrightarrow{PH}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}$，

由$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，得$(k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，

所以 $k_2\boldsymbol{b}^2=k_3\boldsymbol{c}^2$，

同理可得 $k_1\boldsymbol{a}^2=k_2\boldsymbol{b}^2$

所以 $k_1\boldsymbol{a}^2=k_2\boldsymbol{b}^2=k_3\boldsymbol{c}^2=m(m\neq 0)$， ①

又$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{PH}=0$，即$(\overrightarrow{PH}-\overrightarrow{PA})\cdot\overrightarrow{PH}=0$

所以$[(k_1-1)\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}]\cdot(k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c})=0$，

因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$，所以可得



$k_1(k_1-1)a^2+k_2b^2+k_3c^2=0$ ②

由①②得 $m(k_1-1)+mk_2+mk_3=0$.

因为 $m\neq0$，所以 $k_1+k_2+k_3=1$ ③

又由①得 $\frac{m}{a^2}=k_1,\frac{m}{b^2}=k_2,\frac{m}{c^2}=k_3$，代入③得 $m\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=1$

即 $m=\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

所以 $k_1=\frac{b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$，

$k_2=\frac{c^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

$k_3=\frac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

于是，$\overrightarrow{PH}=k_1a+k_2b+k_3c$

$=\frac{b^2c^2a+c^2a^2b+a^2b^2c}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

第5讲 空间中的距离

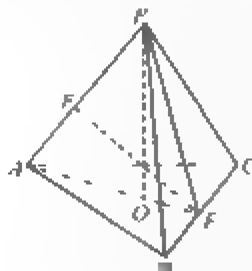
一、选择题

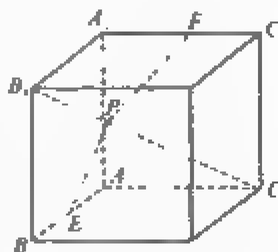
1. D. 异面直线的公垂线是和这两条异面直线都垂直且相交的直线. 根据这个定义，本题应选D.

2. A. 过点A作 $AQ\perp BD$，垂足为Q，连接PQ. 因为 $PA\perp$ 平面ABCD，所以 $PQ\perp BD$，故PQ的长为点P到直线BD的距离. 在 $Rt\triangle BAD$ 中，由面积法得 $AQ=\frac{AB\cdot AD}{BD}=\frac{12}{5}$，$Rt\triangle PAQ$ 中，$PQ=\sqrt{PA^2+AQ^2}=\frac{13}{5}$.

3. B. 由 $PA=PB=PC$ 知，点P在平面ABC上的射影O为△ABC的外心. 如图，延长AO交BC于E，过E作 $EF\perp PA$，垂足为F，则EF为PA与BC的公垂线段，即 $EF=3$. 设 $PA=b$，$AB=a$，则 $AE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. 由 $AE\cdot PO=PA\cdot EF$，得 $\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot2\sqrt{3}=b\cdot3$，即 $a=b$.

因此，$P-ABC$ 为正四面体，故点A到平面ABC的距离等于点P到平面ABC的距离 $PO=2\sqrt{3}$.


（第3题）


（第4题）

4. C. 将原来的图形补成正方体（如图所示），则BC为正方体的一条体对角线. 将正方体绕直线



B_1C 旋转 $120°$，则 A_1 变为 B，C 变为 A_1，因而 P 点到 A_1C 的距离 PF 也随之变为 P 点到 AB 的距离 PE，故 $d_1=d_2$。

5. C P、Q 两点间的距离即异面直线 BD 与 SC 间的距离，设底面正方形 $ABCD$ 的中心为 O，则 $BD\perp$ 平面 SOC，过 O 作 $OM\perp SC$，垂足为 M，则 OM 的长为 BD 与 SC 的距离。因为 $SO=2$，$OC=1$，所以 $SC=\sqrt{5}$，由 $SO\cdot OC=SC\cdot OM$，得 $OM=\frac{2\sqrt{5}}{5}$。



6. B 如图，因为 $A_1C_1\parallel FC$，所以 $A_1C_1\parallel$ 平面 EFC，即 $A_1C_1\parallel$ 平面 B_1AC，故异面直线 A_1C_1 与 EF 的距离等于直线 A_1C_1 与平面 B_1AC 的距离，亦等于点 A_1 到平面 B_1AC 的距离。连接 A_1C，设点 A_1 到平面 B_1AC 的距离为 h，

则由 $V_{A_1-B_1AC}=V_{C-A_1AB_1}$，得 $h=\frac{S_{\triangle A_1AB_1}\cdot BC}{S_{\triangle B_1AC}}=\frac{\frac{a^2}{2}\cdot a}{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{2}a)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$。

7. D 将半平面 α 沿棱 l 翻折到 β 所在平面内，这时 AC 与 BD 的交点 M 到 A、C 两点的距离之和最小，故 $(AM+CM)_{\min}=\sqrt{(2+3)^2+1}=\sqrt{26}$。



8. A 如图，因为 $A_1C_1\parallel EF$，所以 $A_1C_1\parallel$ 平面 $EBFD_1$，故直线 A_1C_1 到平面 $EBFD_1$ 的距离等于点 A_1 到平面 $EBFD_1$ 的距离，亦等于点 A_1 到平面 D_1EF 的距离。连接 A_1F，设点 A_1 到平面 D_1EF 的距离为 h，由 $V_{A_1-D_1EF}=V_{F-A_1D_1E}$，得 $h=\frac{S_{\triangle A_1D_1E}\cdot C_1D_1}{S_{\triangle D_1EF}}=\frac{\frac{a^2}{4}\cdot a}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}a$。

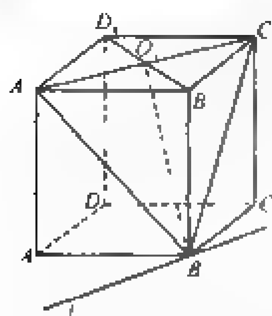
二、填空题

9. $\frac{\sqrt{6}}{2}a$ 因为面 $ABC_1D_1\perp$ 面 A_1B_1CD，且面 $A_1BC_1\cap$ 面 $ABC_1D_1=l$，面 $A_1BC_1\cap$ 面 $A_1B_1CD=A_1C$，所以 $l\parallel A_1C$。设 A_1C 与 B_1D 交于 O_1，由对称性知，BO_1 的长为直线 l 与 A_1C 的距离。在 $Rt\triangle BB_1O_1$ 中，$BO_1=\sqrt{BB_1^2+O_1B_1^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$。

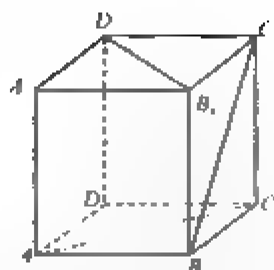
10. 1 或 $\sqrt{3}$ 以 AC 为例，与 AC 异面的对角线可分两类：一类是相对上底面内的对角线 B_1D_1；另一类是相邻四个侧面内的对角线（由对称性，不妨取 BC_1）。如图，若 AC 与 B_1D_1 的距离为 1，则正方体的棱长为 1；若 AC 与 BC_1 的距离为 1，则正方体的棱长为 $\sqrt{3}$。

11. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$ 如图，取 PC 的中点 F，连接 EF，则 $EF\parallel AC$，且 $EF=\frac{1}{2}AC$。又 $BE\perp AC$，$PC\perp AC$，所以 $BE\perp EF$，$PC\perp EF$，故 EF 为异面直线 BE 与 PC 的公垂线段。

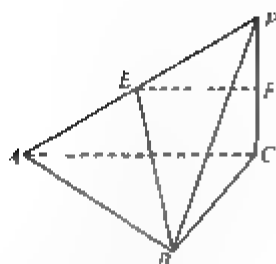
在 $Rt\triangle PCA$ 中，$AC=\sqrt{PA^2-PC^2}=\sqrt{a^2-b^2}$，故异面直线 BE 与 PC 的距离为 $EF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$。



（第9题）

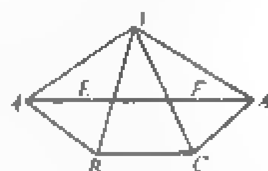


（第10题）



（第11题）

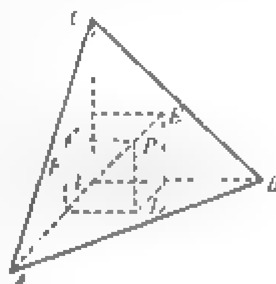
12．6　如图，沿侧棱 VA 把三棱锥侧面展开，则△AEF 的周长等于 $AE+EF+FA'$，所以当 A、E、F、A' 四点在展开图中共线时，△AEF 的周长最小．又因为 $\angle AVA'=3\times40^\circ=120^\circ$，所以 $AA'=2VA\sin60^\circ=6$．



（第12题）

13．$\frac{\sqrt{30}}{4}a$　作 $AD\perp BC$，垂足为 D，连接 VD，由 $VA\perp$ 平面 ABC，得 $VD\perp BC$，从而 $CD\perp$ 平面 VAD，则平面 $VAD\perp$ 平面 VBC．作 $AH\perp VD$，垂足为 H，则 $AH\perp$ 平面 VBC，故 AH 的长为点 A 到平面 VBC 的距离．在 Rt△ADB 中，$AD=AB\sin60^\circ=\sqrt{3}a$，在 Rt△$VAD$ 中，$VA=\sqrt{5}a$，$VD=2\sqrt{2}a$，则 $AH=\frac{VA\cdot AD}{VD}=\frac{\sqrt{30}}{4}a$．

14．7　如图，作 $PD\perp$ 平面 VAB，$PE\perp$ 平面 VBC，$PF\perp$ 平面 VCA，垂足分别为 D、E、F．由于三棱锥 $V-ABC$ 的三条侧棱两两垂直，所以三个侧面也两两垂直，故以 PD、PE、PF 为相邻三条棱的长方体内接于三棱锥，且 V 为长方体的一个顶点，于是 PV 为长方体的对角线，其长度为 $\sqrt{PD^2+PE^2+PF^2}=7$．



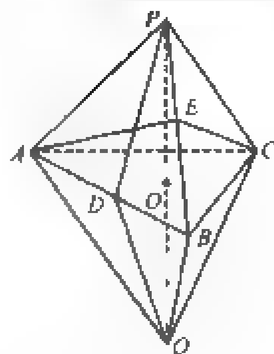
（第14题）

15．3　如图，$P-ABC$、$Q-ABC$ 是两个全等的正三棱锥，设 D 为 AB 的中点，则 $\angle PDQ$ 为二面角 $P-AB-Q$ 的平面角．作 $AE\perp PB$，垂足为 E，连接 CE，由对称性知 $CE\perp PB$，所以 $\angle AEC$ 为二面角 $A-PB-C$ 的平面角．由题设得 $\angle PDQ=\angle AEC$．设底面△ABC 的边长为 $2a$，侧棱长 $PA=b$．在△PAB 中，有 $AB\cdot PD=PB\cdot AE$，即 $AE=\frac{2a\cdot PD}{b}=\frac{2a\sqrt{b^2-a^2}}{b}$．在△$PAQ$ 中，易求得 $PQ=2\sqrt{b^2-\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}a\right)^2}=2\sqrt{b^2-\frac{4}{3}a^2}$．由△$AEC$∽△$PDQ$，得 $\frac{PQ}{AC}=\frac{PD}{AE}$，即 $\frac{2\sqrt{b^2-\frac{4}{3}a^2}}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{2a\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}}$，化简得 $b=\frac{4}{3}a$．此时有 $PQ=\frac{4}{3}a=b<2a$，从而 $b=2$，$2a=3$．故最远的两顶点间距离为3．

16．$3\sqrt{41}$　在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=5$，$AD=4$，$AC=x$．设 $AB=a$，$AD=b$，



$AA_1=x$，则有 $a^2+b^2=x^2$，$b^2+c^2=4^2$，$c^2+a^2=5^2$，由后两式，得 $a^2-b^2=9$。则 $a^2>9$，从而 $x^2+9=2a^2>18$，所以 $x>3$. 又因为 $\triangle AB_1D_1$ 为锐角三角形，所以 $AB_1^2+AD_1^2>B_1D_1^2$，即 $x^2<5^2+4^2=41$. 故 $3<x<\sqrt{41}$.



（第15题）

三、解答题

17 (1) 过 A 作 $AE\perp BD$，垂足为 E，连接 QE. 因为 $QA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $QE\perp$ 平面 $ABCD$，则 QE 的长为点 Q 到直线 BD 的距离.

在 $Rt\triangle BAD$ 中，$AE=\dfrac{AB\cdot AD}{BD}=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

在 $Rt\triangle QAE$ 中，$QE=\sqrt{AE^2+QA^2}=\sqrt{\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{c^2}{4}}$

$=\dfrac{1}{2(a^2+b^2)}\sqrt{(a^2+b^2)(4a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}$.

(2) 因为 Q 为 PA 的中点，所以点 P 与点 A 到平面 QBD 的距离相等.

过 A 作 $AH\perp QE$，垂足为 H.

因为 $BD\perp$ 平面 QAE，所以平面 $QAE\perp$ 平面 QBD，

从而 $AH\perp$ 平面 QBD，故 AH 的长为点 A 到平面 QBD 的距离.

在 $Rt\triangle QAE$ 中，由面积关系，得

$AH=\dfrac{QA\cdot AE}{QE}=\dfrac{abc}{\sqrt{4a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

18. (1) 略

(2) 以 D 为原点，DA，DC，DD_1 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$A_1(1,0,1)$，$C_1(0,1,1)$，于是 $\overrightarrow{DA_1}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$.

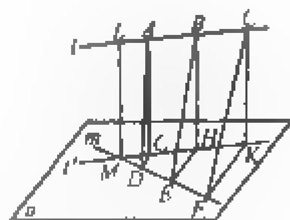
设平面 A_1C_1D 的法向量为 $n=(x,y,z)$，则由 $n\perp\overrightarrow{DA_1}$，$n\perp\overrightarrow{DC_1}$，得 $n\cdot\overrightarrow{DA_1}=0$，$n\cdot\overrightarrow{DC_1}=0$，即 $x+z=0$，$y+z=0$.

令 $z=1$，则 $x=y=-1$，即 $n=(-1,-1,1)$.

故平面 AB_1C 与平面 A_1C_1D 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{DA}\cdot n|}{|n|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

19 如图，设 LM 为异面直线 l，m 的公垂线，其中 $L\in l$，$M\in m$. 过 m 作平面 α 平行于直线 l，过点 A，B，C 分别作平面 α 的垂线 AG，BH，CK，则垂足 G，H，K 落在与 l 平行的直线 l' 上.



（第19题）

因为 $AB=BC$，$AG\parallel BH\parallel CK$，所以 $GH=HK$.

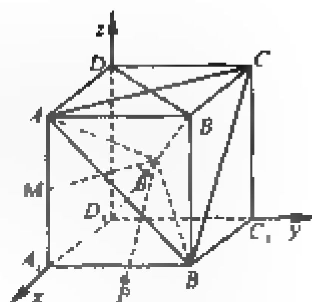
又 $AD\perp m$，$BE\perp m$，$CF\perp m$，所以 $GD\perp m$，$HE\perp m$，$KF\perp m$，从而 $GD\parallel HE\parallel KF$，且 E，H 分别为 DF，GK 的中点.

设 l 与 m 的距离为 d，则 $AG=BH=CK=d$.

因为 $GD=\sqrt{AD^2-AG^2}=\sqrt{15-d^2}$，$HE=\sqrt{BE^2-BH^2}=\sqrt{\dfrac{49}{4}-d^2}$，$KF=\sqrt{CF^2-CK^2}$

$=\sqrt{10-d^2}$，所以由 $2HE=GD+KF$，

得 $2\sqrt{\frac{49}{4}-d^2}=\sqrt{15-d^2}+\sqrt{10-d^2}$ 解得 $d=\sqrt{6}$。



（第 20 题）

20. 因为 $\triangle AB_1C$ 是正三角形，设体对角线 BD_1 交 $\triangle AB_1C$ 所在平面于 O_1 点，则 O_1 为圆 Γ 的圆心，可得 $BO_1=\frac{1}{3}BD_1$，$D_1O_1=\frac{2}{3}BD_1$。

如图，以 D_1 为原点，D_1A_1、D_1C_1、D_1D 分别为 x 轴、y 轴、z 轴正向建立空间直角坐标系，则 $O_1(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$，$M(2,0,1)$，从而 $|MO_1|=\frac{\sqrt{21}}{3}$，

$|PO_1|=|AO_1|=\frac{\sqrt{2}}{\cos30^\circ}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

记 $\angle MO_1P=\theta$，在 $\triangle MO_1P$ 中，由余弦定理，得

$MP=\sqrt{MO_1^2+PO_1^2-2MO_1\cdot PO_1\cos\theta}=\frac{1}{3}\sqrt{45-12\sqrt{14}\cos\theta}$.

显然，θ 的最小值是 MO_1 与平面 AB_1C 的夹角 θ_0，而 θ 的最大值为 $\pi-\theta_0$。下面求 $\cos\theta_0$。显然，$DB_1\perp$ 平面 AB_1C。

又 $\overrightarrow{O_1M}=(\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$，$a=3\overrightarrow{O_1M}=(2,-4,-1)$，$b=\frac{3}{4}\overrightarrow{O_1D_1}=(-1,-1,-1)$，则 $\cos(90^\circ-\theta_0)=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\frac{1}{\sqrt{7}}$，即 $\sin\theta_0=\frac{1}{\sqrt{7}}$，$\cos\theta_0=\sqrt{\frac{6}{7}}$，$\cos(\pi-\theta_0)=-\sqrt{\frac{6}{7}}$

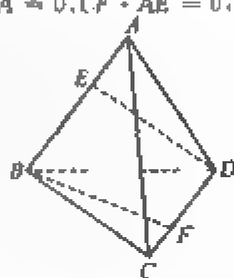
所以 $MP\geqslant\frac{1}{3}\sqrt{45-12\sqrt{14}\times\sqrt{\frac{6}{7}}}=\frac{1}{3}\sqrt{45-24\sqrt{3}}$，

$$MP\leqslant\frac{1}{3}\sqrt{45+24\sqrt{3}}.$$

故 MP 的取值范围是$[\frac{\sqrt{45-24\sqrt{3}}}{3},\frac{\sqrt{45+24\sqrt{3}}}{3}]$。

第 6 讲　空间中的角

一、选择题



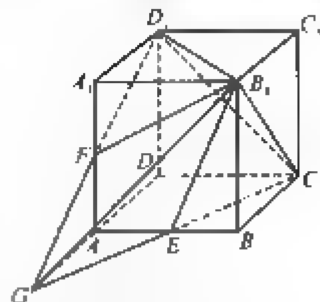
（第 1 题）

1. A. 如图，不妨设正四面体棱长为 4. 因为 $BC\perp AD$，$CF\perp AE$，所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}=0$，$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{AE}=0$，从而 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AE}=2|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AE}|\cos120^\circ=2\times4\times1\times(-\frac{1}{2})=-4$，又 $|\overrightarrow{BF}|=|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CF}^2-2|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{CF}|\cos60^\circ}=\sqrt{13}$，故直线 BF 与 DE 所成的角为 $\arccos\frac{|\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\arccos\frac{4}{13}$.

2. C. 如图，分别延长 CE、D_1F、DA，由 E、F 分别是 AB、AA_1 的中点知，CE、D_1F、DA 三线交于一点 G，连接 B_1G。设正方体的棱长为 1，则 $B_1C=\sqrt{2}$，$B_1G=$



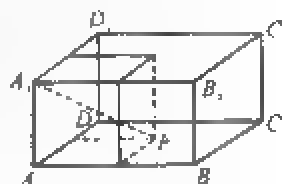
$\sqrt{3}$，$CG=\sqrt{5}$，所以 $B_1C^2+B_1G^2=CG^2$，则 $B_1C\perp B_1G$，同理 $DB_1\perp B_1G$，故 $\angle CB_1D_1$ 为二面角 $C-B_1G-D_1$ 的平面角，连接 CD_1，在 $\triangle B_1CD_1$ 中 $B_1C=B_1D_1=CD_1$，故 $\sin\angle CB_1D_1=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



第 2 题

3. B. 设直角 $\triangle ABC$ 的斜边 AB 在平面 α 内，当平面 $ABC\perp$ 平面 α 时，显然有 $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=1$，当平面 ABC 与平面 α 不垂直时，作 $CC'\perp\alpha$，垂足为 C'，则两直角边 AC、BC 所在直线与平面 α 所成的角分别为 $\angle CAC'$、$\angle CBC'$，故 $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=\frac{C'C^2}{AC^2}+\frac{C'C^2}{BC^2}=\frac{AB^2\cdot C'C^2}{AC^2\cdot BC^2}<1$，综上所述，$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2\leqslant 1$.

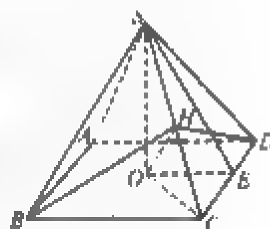
4. C. [解法1] 不妨设 $AB=a$，$AD=b$，$AA_1=c$，且 $a>b>c$. 如图，以 AA_1 为棱的小正方体的对角线 A_1F 与长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 各棱所在直线成等角. 同理，分别以 BB_1、CC_1、DD_1 为棱的小正方体中，各有一条互不平行的对角线满足要求. 故过点 P 且满足要求的直线有 4 条.



（第 3 题）

[解法2] 空间直角坐标系中，考虑过原点且与三条坐标轴成等角的直线，有 4 条.

5. B. 由于二面角 C_1-AB-D 的平面角为 45°，所以在这个二面角及它的"对顶二面角"内，不存在过点 P 且与面 $ABCD$ 和面 ABC_1D_1 均成 30° 角的直线. 转而考虑它的邻补二面角，易知过点 P 有且仅有两条直线与平面 $ABCD$ 和平面 ABC_1D_1 均成 30° 角. 故满足条件的直线 l 有 2 条.



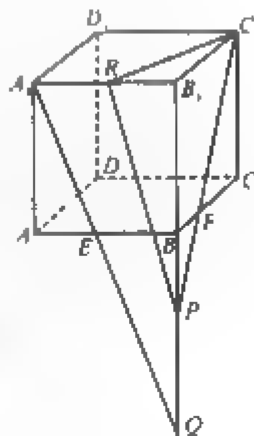
（第 6 题）

6. A. 不妨设正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面边长为 2，高为 h，侧棱长为 l，侧面上的斜高为 h'. 如图，$\angle SCO=\alpha$，$\angle SEO=\beta$，$\angle SCD=\gamma$，$\angle BHD=\theta$. 易知 $\tan\alpha=\frac{h}{\sqrt{2}}$，$\tan\beta=\frac{h}{1}$，所以 $\alpha<\beta$. 又 $\cos\beta=\frac{1}{h'}$，$\cos\gamma=\frac{1}{l}$，且 $h'<l$，所以 $\beta<\gamma$. 由 $OH<OC=OB$，得 $\frac{\theta}{2}>\frac{\pi}{4}$，即 $\theta>\frac{\pi}{2}$，故 $\alpha<\beta<\gamma<\theta$.

7. D. 如图，延长 C_1F、A_1E 与 B_1B 的延长线分别交于 P、Q，过点 P 作 A_1E 的平行线交 A_1B_1 于 R，连接 C_1R，则 $\angle C_1PR$ 为 A_1E 与 C_1F 所成的角. 记 $\angle C_1PR=\theta$，$AE=BF=x(0<x\leqslant a)$，则 $BP=\frac{ax}{a-x}$，$BQ=\frac{a(a-x)}{x}$，$B_1R=\frac{ax}{a-x}$，所以 $C_1R^2=\frac{a^2[(a-x)^2+x^2]}{(a-x)^2}$，$PC_1^2=\frac{a^2[(a-x)^2+a^2]}{(a-x)^2}$，$PR^2=\frac{a^2(x^2+a^2)}{(a-x)^2}$. 在 $\triangle PRC_1$ 中，由余弦定理，得 $\cos\theta=\frac{PR^2+PC_1^2-C_1R^2}{2PR\cdot PC_1}=$

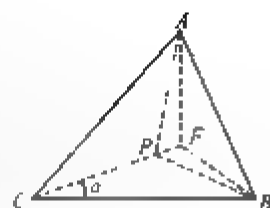
$$\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}\cdot\sqrt{(a-x)^2+a^2}}=\frac{a^2}{\sqrt{\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^2}{4}\right]^2+a^4}}\leqslant\frac{a^2}{\sqrt{\left(\frac{3a^2}{4}\right)^2+a^4}}$$

$=\frac{4}{5}$，故当 $x=\frac{a}{2}$，即 $AE=BF=\frac{1}{2}a$ 时，A_1E 与 C_1F 所成角最小，最小角为



（第 7 题）

$\arccos\frac{4}{5}$

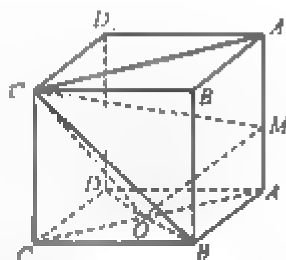


（第 8 题）

8．C　如图，过点 B 作 $BF\perp CP$，垂足为 F，则 $BF\perp$ 平面 ACP，从而 $\triangle ABC$ 在平面 ACP 上的射影是 $\triangle ACF$．设二面角 $P-AC-B$ 的平面角为 θ，$\angle BCP=\varphi$，则 $BF=BC\sin\varphi=3\sin\varphi$，$CF=BC\cos\varphi=3\cos\varphi$．在 $\triangle ACF$ 中，$AF^2=AC^2+CF^2-2AC\cdot CF\cos(90^\circ-\varphi)=4+9\cos^2\varphi-6\sin2\varphi$．由 $AF^2+BF^2=AB^2$，得 $4+9\cos^2\varphi-6\sin2\varphi+9\sin^2\varphi=7$，即 $\sin2\varphi=1$，所以 $\varphi=45^\circ$．在 $\triangle ABC$ 中，$\cos\angle ACB=\frac{2^2+3^2-(\sqrt{7})^2}{2\times2\times3}=\frac{1}{2}$，则 $\angle ACB=60^\circ$，从而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times3\sin60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$S_{\triangle ACF}=\frac{1}{2}AC\cdot CF\sin45^\circ=\frac{3}{2}$，故 $\cos\theta=\frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

即 $\tan\theta=\sqrt{2}$，$\theta=\arctan\sqrt{2}$．

二、填空题



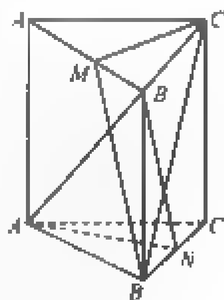
（第 9 题）

9．$\frac{\pi}{4}$．如图，不妨设正方体的棱长为 2，$AM=A_1M=1$，$C_1M^2=A_1M^2+A_1C_1^2=9$，$BC_1^2=8$，$MB^2=5$．

设 O 为正方形 $ABCD$ 的中心，显然点 B 在平面 ACC_1A_1 上的射影为 O．由海伦公式，得 $S_{\triangle BC_1M}=3$，$S_{\triangle OC_1M}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $\cos\theta=\frac{S_{\triangle OC_1M}}{S_{\triangle BC_1M}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$．

10．$\sqrt{2}$．设 $AD=AA_1=a$，$CD=b$，N 为 AB 的中点，则 $C_1N\parallel A_1M$，所以 $\angle D_1C_1N$ 为直线 A_1M 与 C_1D 所成的角，即 $\angle D_1C_1M=\theta$．易知 $C_1D^2=a^2+b^2$，$C_1N^2=a^2+\frac{b^2}{4}$，$D_1N^2=2a^2+\frac{b^2}{4}$，所以 $\cos\theta=\frac{C_1D^2+C_1N^2-D_1N^2}{2C_1D\cdot C_1N}=\frac{b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}}$．

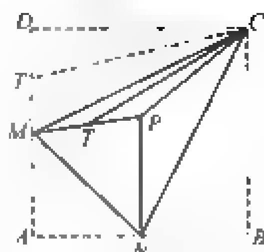
由 $\sin\theta=\frac{\sqrt{78}}{9}$，得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{9}$，故 $\frac{b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$，化简得 $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$．



（第 11 题）

11．45°．如图，设 M 为 A_1B_1 的中点，则 $C_1M\perp$ 平面 A_1B_1BA．又 $A_1B\perp B_1C$，所以 $A_1B\perp B_1M$．由 $\triangle B_1BM\backsim\triangle A_1B_1B$，得 $A_1B_1:BB_1=\sqrt{2}:1$．设 N 为 B_1C_1 的中点，则 $A_1N\perp$ 平面 B_1C_1CB，故 $\angle A_1BN$ 为直线 A_1B 与平面 B_1C_1CB 所成的角．设 $BB_1=a$，则 $A_1B_1=\sqrt{2}a$，$A_1B=\sqrt{3}a$，$A_1N=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，故 $\sin\angle A_1BN=\frac{A_1N}{A_1B}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\angle A_1BN=45^\circ$．





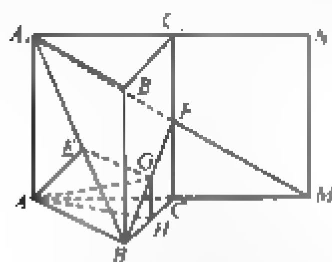
（第 12 题）

12．90° 因为 $\angle CPN=\angle CBN=90^\circ$，所以 $PN\perp CP$，又 $PN=BN=AN$，$PM=DM=AM$，所以 $\triangle MPN\cong\triangle MAN$，$\angle MPN=\angle MAN=90^\circ$，即 $PN\perp PM$，从而 $PN\perp$ 平面 CPM，$PN\perp CT$，故直线 CT 与 PN 所成的角为 90°.

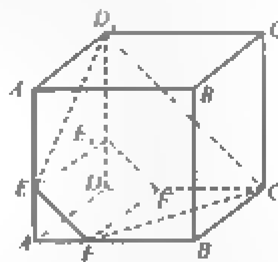
13．15° 或 75° 在 Rt$\triangle ABC$ 中，设 $AB=1$，$\angle ACD=\angle ABC=\theta$，则 $BC=\cos\theta$，$AC=\sin\theta$，$AD=\sin^2\theta$，$BD=\cos^2\theta$，折叠后，$AB^2=\sin^4\theta+\cos^4\theta$. 由余弦定理，得 $\sin^4\theta+\cos^4\theta-2\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{1}{4}=\sin^4\theta+\cos^4\theta$，化简得 $\sin2\theta=\frac{1}{2}$，故 $2\theta=30^\circ$ 或 150°，即 $\theta=15^\circ$ 或 75°.

14．90° 不妨设 $ABC-A_1B_1C_1$ 的棱长均为 2，如图，将侧面 BCC_1B_1 展开到侧面 ACC_1A_1 所在平面内，得到矩形 $AMNA_1$，连接 A_1M 交 CC_1 于点 F，此时点 F 使得 A_1F+BF 最小，易知 F 为 CC_1 的中点. 过 E 作 $EG\parallel A_1F$ 交 BF 于 G，则 $\angle AEG$（或补角）为 AE 与 A_1F 所成的角. 过 G 作 $GH\perp BC$，垂足为 H，连接 AG、AH，则 $GH=\frac{1}{2}CF=\frac{1}{2}$，$AH=\sqrt{3}$，在 Rt$\triangle AHG$ 中，$AG=\frac{\sqrt{13}}{2}$，在 Rt$\triangle A_1C_1F$ 中，$A_1F=\sqrt{5}$，则 $EG=\frac{1}{2}A_1F=\frac{\sqrt{5}}{2}$，又 $AE=\sqrt{2}$，所以 $AE^2+EG^2=\frac{13}{4}=AG^2$，故 $\angle AEG=90^\circ$.

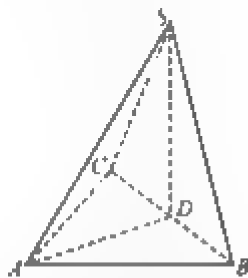
15．60° 设平面 α 与面 CDD_1C_1 所成的角为 θ，平面 α 与 AB 交于 F，则 $EF\parallel CD_1$ 且 $EFCD_1$ 为等腰梯形. 过 E、F 分别作 $EE_1\perp DD_1$，$FF_1\perp CD$，垂足分别为 E_1、F_1，则 $EE_1\perp$ 面 CDD_1C_1，$FF_1\perp$ 面 CDD_1C_1，即等腰梯形 $EFCD_1$ 在面 CDD_1C_1 上的射影为等腰梯形 $E_1F_1CD_1$. 容易求得 $S_{EFCD_1}=\frac{2}{3}(\sqrt{6}-1)$，$S_{E_1F_1CD_1}=\frac{1}{3}(\sqrt{6}-1)$，所以 $\cos\theta=\frac{S_{E_1F_1CD_1}}{S_{EFCD_1}}=\frac{1}{2}$，即 $\theta=60^\circ$.



（第 14 题）



（第 15 题）



（第 16 题）

16．$\frac{\pi}{2}$ 或 $\arccos\frac{5\sqrt{3}}{12}$ （1）当两条较长棱相对时，如图，不妨设 $SA=\sqrt{3}$，$BC=2$，D 为 BC 的中点，则 $AD\perp BC$，$SD\perp BC$，从而 $BC\perp$ 面 SAD，$BC\perp SA$，故 SA 与 BC 所成角为 $\frac{\pi}{2}$. （2）当两条较长棱相邻时，不妨设 $SA=\sqrt{3}$，$AB=2$，在 $\triangle SAB$ 中，由余弦定理，得 $\cos\angle SAB=\frac{5\sqrt{3}}{12}$，故 SA 与 AB 所成角为 $\arccos\frac{5\sqrt{3}}{12}$.



二、解答题

17 [解法1] 设正四面体 $ABCD$ 的棱长为1.

因为 N、Q 分别是正 $\triangle BCD$ 和正 $\triangle ABC$ 的中心，所以 DN 与 AQ 交于 BC 的中点 E

过点 Q 作 $QF\parallel MN$ 交 AD 于 F，则 $\angle PQF$（或补角）为异面直线 MN 与 PQ 所成的角，如图(1)

因为 $NQ\parallel AD$，所以 $MNQF$ 为平行四边形，则 $NQ=\frac{1}{3}AD=MF$，从而 $DF=\frac{5}{6}$

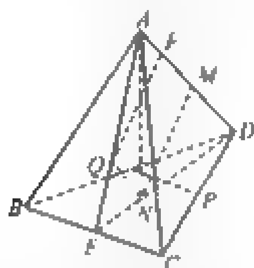
连接 AN，则 $AN\perp$ 面 BCD 从而 $AN\perp DE$，$MN=FQ=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}$

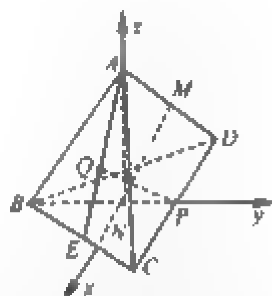
根据对称性，$PQ=\frac{1}{2}$

在 $\triangle DFP$ 中，$PF^2=DP^2+DF^2-2DP\cdot DF\cos60^\circ=\frac{19}{36}$

在 $\triangle PQF$ 中，$\cos\angle PQF=\frac{PQ^2+FQ^2-PF^2}{2PQ\cdot FQ}=-\frac{1}{18}$

故 MN 与 PQ 所成的角为 $\pi-\angle PQF=\arccos\frac{1}{18}$.





（第17题）

[解法2] 设正四面体 $ABCD$ 的棱长为1，如图(2)，以 N 为原点，$\overrightarrow{NP}$、$\overrightarrow{NA}$ 分别为 y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，则 $N(0,0,0)$，$A\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$B\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，$C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)$，$D\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)$，则 $P\left(0,\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)$，$M\left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$，$BC$ 中点为 $E\left(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{12},0\right)$ 从而 $Q\left(\frac{1}{3},-\frac{\sqrt{3}}{18},\frac{\sqrt{6}}{9}\right)$

于是 $\overrightarrow{NM}=\left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$，$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{9},\frac{\sqrt{6}}{9}\right)$

因此 $\cos<\overrightarrow{NM},\overrightarrow{PQ}>=\frac{\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{NM}|\cdot|\overrightarrow{PQ}|}=-\frac{1}{18}$

故直线 MN 与 PQ 所成的角为 $\arccos\frac{1}{18}$.

18. (1) 因为 $PA\perp$ 面 $ABCD$，$CD\perp AD$，所以 $PA\perp CD$，$CD\perp$ 面 PAD，$CD\perp AM$

又 $PC\perp$ 面 AMN，所以 $PC\perp AM$

故 $AM\perp$ 平面 PCD，于是，$AM\perp PD$.

(2) 因为 $AM\perp$ 平面 PCD，所以 $AM\perp PM$，$AM\perp MN$，故 $\angle PMN$ 为二面角 $P-AM-N$ 的平面



角

又 $PN \perp$ 平面 AMN，所以 $PN \perp MN$

在 $Rt\triangle PDC$ 中，$CD = 2$，$PD = 2\sqrt{2}$，则 $PC = 2\sqrt{3}$.

因为 $PA = AD$，$AM \perp PD$，所以 M 为 PD 的中点，则 $PM = \frac{1}{2}PD = \sqrt{2}$

（第 18 题）

由 $Rt\triangle PNM \backsim Rt\triangle PDC$，得 $\frac{MN}{PM} = \frac{CD}{PC}$

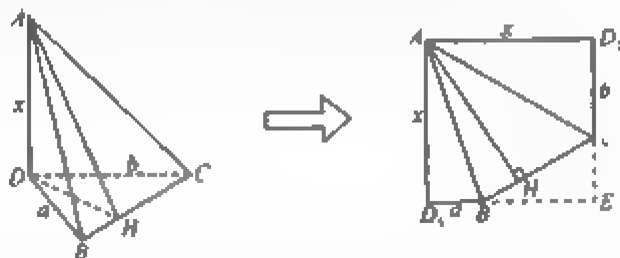
故 $\cos\angle PMN = \frac{MN}{PM} = \frac{CD}{PC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $\angle PMN = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

（3）如图，延长 NM、CD 交于点 E，因为 $PC \perp$ 平面 AMN，所以 $\angle CEN$ 为直线 CD 与平面 AMN 所成的角

因为 $CD \perp PD$，$EN \perp PN$，所以 $\angle CEN = \angle MPN$.

在 $Rt\triangle PNM$ 中，$\sin\angle MPN = \frac{MN}{PM} = \frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $\angle CEN = \angle MPN = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$

19. 设 $AD = x$，$BD = a$，$CD = b$. 如图，将四面体沿棱 AD、BD、CD 剪开，然后将 $\triangle ADB$、$\triangle ADC$ 分别沿 AB、AC 翻展开在 $\triangle ABC$ 所在平面内，得五边形 AD_1BCD_2



（第 19 题）

由题设知 $\angle D_1AD_2 = 90^\circ$，$AD_1 = AD_2 = x$

延长 D_1B、D_2C 交于 E，则 AD_1ED_2 为正方形，且 $BE = x - a$，$CE = x - b$，$BC = \sqrt{a^2 + b^2}$

由 $BE^2 + CE^2 = BC^2$，得 $(x-a)^2 + (x-b)^2 = a^2 + b^2$，即 $x = a + b$.

过 D 作 $DH \perp BC$，垂足为 H，则 $AH \perp BC$，故 $\angle AHD$ 为二面角 $A-BC-D$ 的平面角

在 $Rt\triangle BDC$ 中，$DH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$，

在 $Rt\triangle ADH$ 中，$AH = \sqrt{AD^2 + DH^2} = \frac{a^2 + ab + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

故 $\cos\angle AHD = \frac{DH}{AH} = \frac{ab}{a^2 + ab + b^2} \leq \frac{ab}{3ab} = \frac{1}{3} < 0.3420 = \cos 70^\circ$

又 $y = \cos x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数，所以 $\angle AHD > 70^\circ$.

20. （1）面 $ABC \perp$ 面 BCD，面 $ABD \perp$ 面 BCD. 证明如下：因为 $AB \perp BC$，$AB \perp CD$，所以 $AB \perp$ 面

BCD

故面 $ABC \perp$ 面 BCD，面 $ABD \perp BCD$.

(2) 如图，作 $CE \perp BD$，垂足为 E，则 $CE \perp$ 面 ABD. 再作 $EF \perp AD$，垂足为 F，则 $CF \perp AD$，故 $\angle CFE$ 为二面角 $C-AD-B$ 的平面角，即 $\alpha = \angle CFE$.

在 $Rt\triangle BCD$ 中，$CE = \dfrac{BC \cdot CD}{BD} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

从而 $DE = \sqrt{CD^2 - CE^2} = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

在 $Rt\triangle ABD$ 中 $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{2+x^2}$

由 $\triangle DFE \backsim \triangle DBA$，得 $EF = \dfrac{DE \cdot AB}{AD} = \dfrac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)(2+x^2)}}$

在 $Rt\triangle CEF$ 中，$CF = \sqrt{CE^2 + EF^2} = \dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2+x^2}}$

故 $f(x) = \sin\alpha = \dfrac{CE}{CF} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{1+x^2}}\ (x>0)$

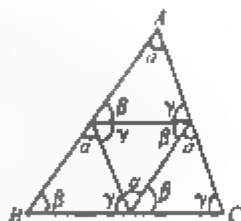
易知 $f(x) \in \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$，即 $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \sin\alpha < 1$

又 $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$，所以 α 的取值范围是 $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

(第 20 题)

第 7 讲　四面体

一、选择题



(第 1 题)

1. A 由平面几何知识知，三条中位线将 $\triangle ABC$ 分成的 4 个三角形全等，折叠后所成四面体共顶点的三个面角恰好为 $\triangle ABC$ 的三个内角，不妨设 $C = \max\{A, B, C\}$，如图，由三面角的性质，得 $A+B>C$，从而 $180^\circ = A+B+C > 2C$，得 $C < 90^\circ$，故 $\triangle ABC$ 必为锐角三角形.

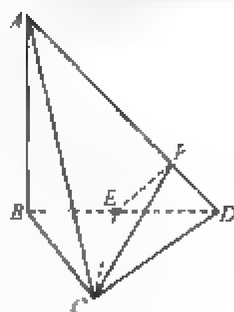
2. D. 如图，取 BD 的中点 E，由 $BC = CD = DA$，得 $CE \perp BD$. 又 $AB \perp$ 面 BCD，所以面 $ABD \perp$ 面 BCD，从而 $CE \perp$ 面 ABD. 过 E 作 $EF \perp AD$，垂足为 F，则 $CF \perp AD$，故 $\angle CFE$ 为二面角 $B-AD-C$ 的平面角. 设 $AB = BC = CD = DB = a$，则 $EF = \dfrac{\sqrt{2}}{2}DE = \dfrac{\sqrt{2}}{4}a$，$CE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，从而 $CF = \sqrt{CE^2 + EF^2} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}a$，故 $\cos\alpha = \cos\angle CFE = \dfrac{EF}{CF} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$

3. A. 由 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \mathbf{0}$，得 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})^2 = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA})^2$，

即 $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{DA}^2 + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA}$. 因为 $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 = 130 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2$，所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA}$，即 $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BC} \cdot (-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BD})$，从而 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}) = 0$，故 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ 只有一个值 0



4. D 点E到边AB、BC、CA的距离之和等于$\triangle ABC$的高，即$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$。又$V_{A-BCD}=V_{E-DAB}+V_{E-DBC}+V_{E-DCA}$，即$\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle DAB}\cdot h_1+\frac{1}{3}S_{\triangle DBC}\cdot h_2+\frac{1}{3}S_{\triangle DCA}\cdot h_3$，这里$h$为正四面体的高，$h_1$、$h_2$、$h_3$分别是点$E$到平面$DAB$、$DBC$、$DCA$的距离。由于$h=\frac{\sqrt{6}}{3}$，各面的面积都相等，所以$h_1+h_2+h_3=h$，即$y=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故$x^2+y^2=\frac{17}{12}$。



（第2题）

5. D 因为$PA\perp$面ABC，所以$PA\perp AB$，则$AE=\frac{1}{2}PB=\sqrt{2}$。

又$PA\perp BC$，$AC\perp BC$，所以$BC\perp$面PAC，则$BC\perp AF$。

因为$AF\perp PC$，所以$AF\perp$面PBC，从而$AF\perp EF$，$AF\perp PB$，于是$PB\perp$面AEF，则$PB\perp EF$。在$Rt\triangle PEF$中，$EF=PE\tan\theta=\sqrt{2}\tan\theta$，$AF=\sqrt{AE^2-EF^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\tan^2\theta}$，故$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AF\cdot EF=\tan\theta\sqrt{1-\tan^2\theta}\leq\frac{\tan^2\theta+1-\tan^2\theta}{2}=\frac{1}{2}$，当且仅当$\tan\theta=\sqrt{1-\tan^2\theta}$，即$\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$\triangle AEF$的面积取得最大值为$\frac{1}{2}$。

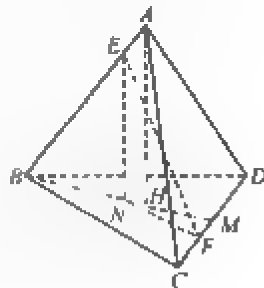
6. A 显然，三组对棱分别相等的四面体的各面都可能不是等腰三角形。

7. B 如果$CD=7$，则BC、AC、BD、AD中必有一条棱长为36，不妨设$AD=36$，则不论AC长为何值，总有$AD>AC+CD$，这是不可能的。所以AC、BC、AD、BD中有一条长为7，不妨设$BD=7$，则$AD=36$，若$AC=18$，则$AC+CD=36$或$AC+BC=41$，所以$AC=27$，$BC=18$，$CD=13$。

8. C 因为$S_1\leq S$，$S_2\leq S$，$S_3\leq S$，$S_4\leq S$，所以$S_1+S_2+S_3+S_4\leq 4S$，从而$\lambda\leq 4$。特别地，对于正四面体，有$\lambda=4$，于是可排除D。考察侧面与底面所成二面角为45°的正三棱锥，以S_4表示其底面积，则有$S_4=(S_1+S_2+S_3)\cos45^\circ$，于是$S_1+S_2+S_3+S_4=(1+\sqrt{2})S$，从而$\lambda=1+\sqrt{2}$，故$2<\lambda<\frac{5}{2}$，可排除A、B。

二、填空题

9. $\sqrt{23}$ 如图，过点A作$AH\perp$底面BCD，则垂足H为$\triangle BCD$的中心，连接BH并延长交CD于M，过点E作$EN\perp$底面BCD，则垂足N在BM上，连接NF，则$EN=\frac{5}{6}AH=\frac{5}{3}\sqrt{6}$，$NF=\sqrt{MN^2+MF^2}=\sqrt{\frac{19}{3}}$，故$EF=\sqrt{EN^2+NF^2}=\sqrt{23}$。

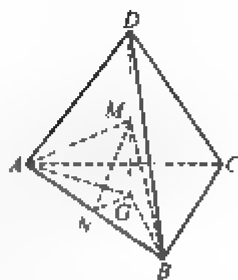


（第9题）

10. 如图，取AB的中点N，则由$\angle AMN=90^\circ$，得$MN=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}$，$GN=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，在$Rt\triangle MGN$中，$MG=\sqrt{MN^2-GN^2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，从而$DM$

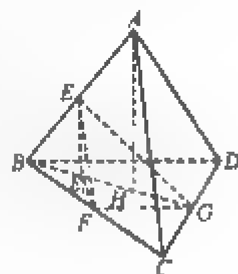


$=DG-MG=\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，故$\frac{DM}{MG}=1$.



(第10题)

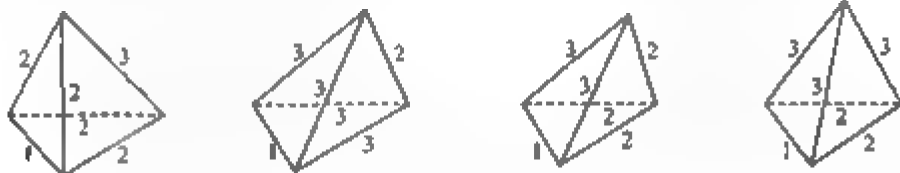
11. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 因为$PA\perp PB$，$\angle PBA=45^\circ$，M为AB的中点，所以$PM\perp AB$．又$PC\perp PA$，$PC\perp PB$，所以$PC\perp$平面PAB，则$PC\perp AB$，从而$AB\perp$平面PCM，故平面$PCM\perp$平面ABC．过P作$PH\perp CM$，则$PH\perp$平面ABC，故$\angle PCH$为直线PC与平面ABC所成的角．设$PA=a$，则$PM=\frac{\sqrt{2}}{2}a$．又$PB=a$，所以$PC=\sqrt{3}a$，故$\tan\angle PCM=\frac{PM}{PC}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.



(第12题)

12. $\pi-\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$ 如图，作$EE_1\perp$平面BCD，则$EE_1\perp BG$．因为$EF\parallel AC$，$FG\parallel BD$，$AC\perp BD$，所以$EF\perp FG$，从而$E_1F\perp FG$，故$\angle EFE_1$是二面角$E-FG-B$的平面角．过点A作$AH\perp$平面BCD，垂足为H．设正四面体$ABCD$的棱长为a，则$EE_1=\frac{1}{2}AH=\frac{\sqrt{6}}{6}a$，$EF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}a$，所以$\sin\angle EFE_1=\frac{EE_1}{EF}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故二面角$C-FG-E$的大小为$\pi-\angle EFE_1=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

13. 4个 易知满足条件的四面体至多只有一条棱长为1(否则不构成三角形)．当一条棱长为1时，其余五条棱长的取值将有4种情况：(2,2,2,2,3)、(3,3,3,3,2)、(2,2,2,3,3)、(3,3,3,2,2)，如下图所示：



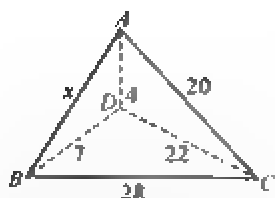
(第13题)

14. 8 当$x\leq 4$时，以28为棱的两个侧面三角形必须同时满足两边之和大于第三边，只有$22+7>28$，$22+20>28$．此时长为22的棱不可能出现在均有长为28的棱的两个侧面上．当$x>4$时，如图所示的四面体才可能使x达到最小．在$\triangle ABC$和$\triangle ABD$中，有$\begin{cases}28-20<x<28+20,\\7-4<x<7+4,\end{cases}$解得$8<x<11$，故$[x]_{\min}=8$.

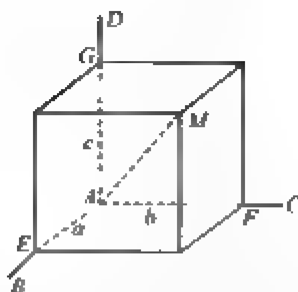
15. $\frac{\sqrt{69}}{15}$ 如图，以射线AB、AC、AD为棱，AM为对角线构造长方体，使$AE=a$，$AF=b$，$AG=c$，则$\cos\angle BAM=\frac{a}{AM}$，$\cos\angle CAM=\frac{b}{AM}$，$\cos\angle DAM=\frac{c}{AM}$．因为$AM^2=a^2+b^2+c^2$，所以$\cos^2\angle BAM+\cos^2\angle CAM+\cos^2\angle DAM=1$.

故$\cos\angle DAM=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{69}}{15}$





（第 14 题）



（第 15 题）

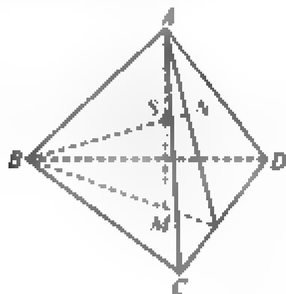
16．8　如图，作四面体的外接平行六面体 $AA_1B_1B-D_1CC_1D$，由于 $EF \perp CD$，$CD \parallel A_1B_1$，则 $EF \perp A_1B_1$，又 $EF \perp AB$，所以 $EF \perp$ 面 AA_1B_1B，由于 EF　$A_1C \parallel B_1D$，故 $CA_1 \perp$ 面 AA_1B_1B，从而此六面体为直六面体。又 $BC = 6\sqrt{2}$，所以 $A_1B = 6$，$\angle AA_1B = 90^\circ$，因此，此六面体为长方体，故 AD 与 BC 的距离为 8.

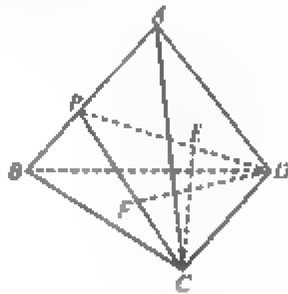
（第 16 题）

三、解答题

17．如图(1)，在四面体 $ABCD$ 中，设 $AM \perp$ 面 BCD，$BN \perp$ 面 ACD，垂足分别为 M、N，且 AM 和 BN 相交于 S 点.

因为 $CD \perp AM$，$CD \perp BN$，所以 $CD \perp$ 面 ABS，则 $CD \perp AB$.





（第 17 题）

如图(2)，过点 C 作 $CP \perp AB$，则 $AB \perp$ 面 PCD.

在 $\triangle PCD$ 中的高线 CE 和 DF，即为四面体 $ABCD$ 的另外两条高线.

事实上，因为 $CE \perp AB$，$CE \perp PD$，所以 $CE \perp$ 面 ABD.

同理，$DF \perp$ 面 ABC.

又 CE 和 DF 为 $\triangle PCD$ 的两条高线，它们必定相交，于是命题得证.

18．答案是肯定的，证明如下：

如图，在四面体 $ABCD$ 中，不妨设 AC 为最长的棱，与 AC 相接的四条棱 AB、AD、CB、CD 中最短的棱为 CD，由 $AD + CD > AC$ 知 $AB + AD \geq CD + AD > AC$，从而 AB、AC、AD 可构成一个三角形的三边．又 BC、CD、BD 显然构成三角形．命题得证.

19．设四面体 $P-ABC$ 中，顶点 A、B、C 处的每三个面角之和均为 180°．现沿 PA、PB、PC 剪开，将四面体的四个面展在 $\triangle ABC$ 所在的平面上（如图所示）.



因为每个顶点的三个面角之和均为 180°，所以 P_1、A、P_3 三点共线，P_2、B、P_3 三点共线，P_1、C、P_2 三点共线，因此 A、B、C 为 $\triangle P_1P_2P_3$ 各边的中点，所以 $P_1A = BC$，$P_1B = AC$，$P_1C = AB$，即 $PA = BC$，$PB = AC$，$PC = AB$

（第 18 题）

（第 19 题）

20. 可以将已知正四面体的两个面铺平后产生的菱形 $ABDC$ 如图所示，那么 $AB = 1$，$\angle BAC = 60°$ 设 P 为 BC 的中点，F 为 $\triangle ABP$ 的费马点，并记 $AF = x$，$BF = y$，$PF = z$，则

$\angle AFB = \angle BFP = \angle PFA = 120°$，$\angle APB = 90°$

由 $S_{\triangle APB} = S_{\triangle AFB} + S_{\triangle BFP} + S_{\triangle PFA}$，得

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(xy + yz + zx)\sin 120°$，

即 $xy + yz + zx = \frac{1}{2}$，　①

在 $\triangle AFB$、$\triangle BFP$、$\triangle PFA$ 中，由余弦定理，得

$x^2 + y^2 + xy = 1$，　②

$y^2 + z^2 + yz = \frac{1}{4}$，　③

$z^2 + x^2 + zx = \frac{3}{4}$　④

① × 3 + ② + ③ + ④，得 $2(x + y + z)^2 = \frac{7}{2}$，

即 $x + y + z = \frac{\sqrt{7}}{2}$

设点 F 关于 P 的对称点为 F'，则线段 AF、BF、PF、PF'、CF'、DF' 组成的集合具有题中要求的性质，且它们的长度之和为 $\sqrt{7}$，小于 $1 + \sqrt{3}$

（第 20 题）

第 8 讲　多面体与球

一、选择题

1. A. 对于三棱锥 $S-ABC$，设 $AB = BC = CA = SA = a$，$SB = SC = b$，若 $a \neq b$ 则命题①不正确；对于四棱锥 $S-ABCD$，设底面四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，且圆心 O 为顶点 S 在底面上的射影，则它的各侧面都是等腰三角形，而这样的四棱锥不一定是正四棱锥，故命题②也不正确；设 $S-ABC$ 为正三棱锥，在侧棱 SA 内存在一点 A'，使 $BA' = BA$，则三棱锥 $S-A'BC$ 的底面 $\triangle A'BC$ 仍是正三角形，相邻两侧面所成的二面角都相等，但它不是正三棱锥，故命题③不正确

（第 2 题）

2. C. 如图，设球 O_1 的半径为 r，且设球 O_1 作在角 D_1 内，则 O_1、O_2 在对角线 BD_1 上，设 $\angle AD_1B = \theta$，则 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$，易知球 O_1 与侧面 ADD_1A_1 的切点 E 在 AD_1 上，在 $\triangle D_1EO_1$



中，$D_1O_1 = \frac{r}{\sin\theta}$，$O_1O_2 = r + \frac{1}{2}$，于是有 $2\left[\sqrt{3}r + \left(r+\frac{1}{2}\right)\right] = BD = \sqrt{3}$，解得 $r = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$，故球 O_2 的表面积为 $S = 4\pi r^2 = (7-4\sqrt{3})\pi$.

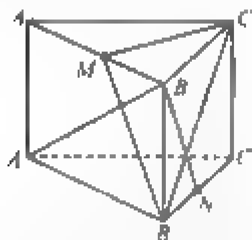
3. A. 如图，设 M 为 AB 的中点，连接 CM，B_1M，则 $CM \perp$ 面 AA_1B_1B，由三垂线定理知，$B_1M \perp A_1B$，所以 $\triangle B_1BM \backsim \triangle A_1B_1B$，则 $A_1B_1 : BB_1 = \sqrt{2} : 1$.

设 N 为 B_1C_1 的中点，则 $A_1N \perp$ 面 BCC_1B_1，故 $\angle A_1BN$ 为直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成的角. 设 $BB_1 = a$，则 $A_1B_1 = \sqrt{2}a$，$A_1B = \sqrt{3}a$，$A_1N = \frac{\sqrt{6}}{2}a$.

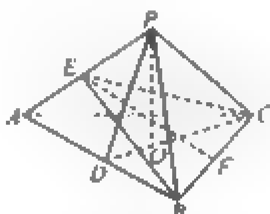
故 $\sin\angle A_1BN = \frac{A_1N}{A_1B} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\angle A_1BN = 45^\circ$.

4. D. 如图，设正三棱锥 $P-ABC$ 底面边长为 a，侧棱长为 b，$PO \perp$ 底面 ABC，则垂足是 O 为底面 $\triangle ABC$ 的中心，连接 CO 并延长交 AB 于 D，连接 PD，则 $PD \perp AB$，故 $\angle PDO$ 为侧面 PAB 与底面 ABC 所成二面角的平面角. 过 B 作 $BE \perp PA$，垂足为 E，连接 CE，则 $CE \perp PA$，故 $\angle BEC$ 为侧面 PAB 与 PAC 所成二面角的平面角. 设 F 为 BC 的中点，由题设知 $\angle BEF = \angle PDO$，则 $Rt\triangle POD \backsim Rt\triangle EFB$，从而

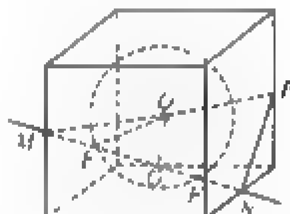
$\frac{PD}{BE} = \frac{OD}{BF} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$，又 $AB \cdot PD = PA \cdot BE$，即 $\frac{PD}{BE} = \frac{PA}{AB} = \frac{b}{a}$，故 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



（第3题）



（第4题）



（第5题）

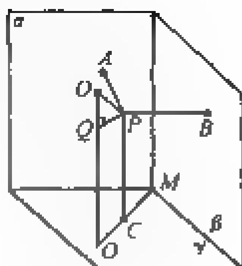
5. B. 如图，M、N 是正方体中两条互为异面直线的棱的中点，直线 MN 与内切球 O 的表面相交于 E、F 两点，连接 MO 并延长交对棱于 P，则 P 为对棱的中点.

取 EF 的中点 G，则 $OG \perp EF$. 又易知 $PN \perp MN$，从而 $OG \parallel PN$，且 $OG = \frac{1}{2}PN = \frac{\sqrt{2}}{4}a$，在 $Rt\triangle OGE$ 中，$OE = \frac{a}{2}$，则 $EG = \sqrt{OE^2 - OG^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}a$，故 $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

6. D. 记该凸多面体的8个面的边数依次为 $a_1, a_2, \cdots, a_8$，则各面多边形内角总和为 $(a_1-2)\pi + (a_2-2)\pi + \cdots + (a_8-2)\pi = 16\pi$，所以 $a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = 32$，故该多面体的棱数为 $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_8}{2} = 16$.

7. A. 设 $S-A_1A_2\cdots A_n$ 为正 n 棱锥，现固定底面正 n 边形，让顶点 S 作上、下运动. 当 S 向下运动趋近极端位置（即底面正 n 边形中心）时，相邻两侧面所成二面角趋近于平角；当 S 向上运动趋向无穷远时，则正 n 棱锥趋近于正 n 棱柱，相邻两侧面所成二面角趋近于底面正 n 边形内角 $\frac{n-2}{n}\pi$.



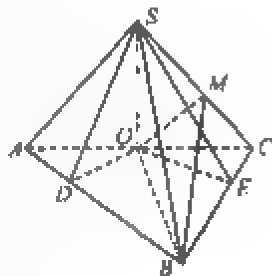


（第8题）

8. D. 如图，设球心为O的小球上一点P在共点于M的三个面α、β、γ上的射影分别为A、B、C，球心O在面γ上的射影为O_1，$PQ\perp OO_1$，垂足为Q. 设$PA=PB=3\text{cm}$，$PC=6\text{cm}$，由题设知O_1、C、M三点共线，且$CM=3\sqrt{2}\text{cm}$，$O_1M=\sqrt{2}R\text{cm}$（R为球O的半径），$O_1C=(R-3)\sqrt{2}\text{cm}$，$OQ=OO_1-QO_1=(R-PC)=(R-6)\text{cm}$，$PQ=O_1C=(R-3)\sqrt{2}\text{cm}$. 在$\text{Rt}\triangle PQO$中，由$OP^2=OQ^2+PQ^2$，得$R^2=(R-6)^2+2(R-3)^2$，解得$R=3$或$R=9$.

二、填空题

9. $1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 设大球最小半径为R，要使大球半径最小，则四个小球必两两外切且与大球都相切，这时四个小球的球心构成一个正四面体，其棱长为2，四面体的中心O为大球球心，设小球球心与大球球心的距离为d，则$d=R-1$，易知$d=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故$R=1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



（第10题）

10. $\arctan\sqrt{7}$ 如图，过点S作$SO\perp AC$，垂足为O，由面$SAC\perp$面ABC知，$SO\perp$面ABC. 过点O分别作$OD\perp AB$，$OE\perp BC$，垂足分别为D、E，则$SD\perp AB$，$SE\perp BC$，所以$\angle SDO$、$\angle SEO$分别是二面角$S-AB-C$、$S-BC-A$的平面角，由题设知$\angle SDO=\angle SEO=45^\circ$，从而$OD=OE$，$AD=CE$，$BD=BE$，因此$\triangle ADO\cong\triangle CEO$，$OA=OC$，即$O$为$AC$的中点，于是$BO\perp AC$，$BO\perp$面$SAC$. 作$OM\perp SC$，垂足为$M$，则$BM\perp SC$，故$\angle OMB$为二面角$A-SC-B$的平面角. 记$\triangle ABC$边长为$2a$，则$BO=\sqrt{3}a$，$SO=OD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，在$\text{Rt}\triangle SOC$中，$OM=\dfrac{SO\cdot OC}{SC}=\sqrt{\dfrac{3}{7}}a$. 所以$\tan\angle OMB=\dfrac{OB}{OM}=\sqrt{7}$，即$\angle OMB=\arctan\sqrt{7}$.

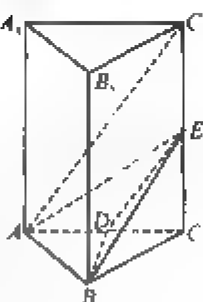
11. $12R$ 设$AB=a$，$BC=b$，$AA_1=c$，在$\text{Rt}\triangle A_1AO$中，有$OA^2+AA_1^2=OA_1^2$，即$\dfrac{a^2+b^2}{4}+c^2=R^2$. 因为$\dfrac{5}{4}a^2+\dfrac{5}{4}b^2+8c^2=(a^2+b^2)+\left(\dfrac{a^2}{4}+4c^2\right)+\left(\dfrac{b^2}{4}+4c^2\right)\geqslant 2ab+2ac+2bc$，在上式两边同加上$a^2+b^2+c^2$，得$9\left(\dfrac{a^2+b^2}{4}+c^2\right)\geqslant(a+b+c)^2$，即$9R^2\geqslant(a+b+c)^2$，则$a+b+c\leqslant 3R$. 当且仅当$a=b=4c=\dfrac{4R}{3}$时上式取等号. 故所有棱长之和的最大值为$12R$.

12. $\dfrac{12}{5}$ 如图，取CC_1的中点E，则$AC_1\parallel DE$，从而$AC_1\parallel$面BDE，故异面直线AC_1与BD间的距离等于直线AC_1到平面BDE的距离，亦等于点A到平面BDE的距离，设为h. 因为$BD\perp AC$，所以$BD\perp$面ACC_1A_1，从而$BD\perp DE$. 于是$S_{\triangle BDE}=\dfrac{1}{2}BD\cdot DE=\dfrac{15}{2}\sqrt{3}$，$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\dfrac{9}{2}\sqrt{3}$，$CE=4$，由$V_{A-BDE}=V_{E-ABD}$，得$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{15}{2}\sqrt{3}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9}{2}\sqrt{3}\times 4$，即$h=\dfrac{12}{5}$.

13. $2\sqrt{70}$ 依题意，以PA、PB、PC为相邻三条棱的长方体内接于球，则该长方体的对角线为球的

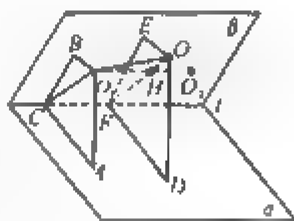


直径，有 $PA^2+PB^2+PC^2=100$，即 $5PB^2+PC^2=100$. 从而 $(PA+PB+PC)^2=(3PB+PC)^2=\left(\frac{3}{\sqrt5}\cdot\sqrt5PB+PC\right)^2\le\left(\frac95+1\right)(5PB^2+PC^2)=280$，故 $(PA+PB+PC)_{max}=2\sqrt{70}$.



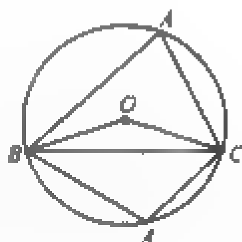
（第 12 题）

14. 250 由 $V-E+F=2$，$F=32$，得 $E=V+30$. 因为每个顶点处有 $T+P$ 个面相交，所以每个顶点处有 $P+T$ 条棱，$2E=V(P+T)$，即 $V(P+T)=2(V+30)$，即 $V(P+T-2)=60$. 由于每个三角形面有 3 个顶点，所以 VT 将每个三角形面算了 3 次，故三角形面共有 $\frac{VT}{3}$，同理，五边形面有 $\frac{VT}{5}$. 又因为每个面是三角形或五边形，所以 $V\left(\frac{P}{5}+\frac{T}{3}\right)=32$，与 $V(P+T-2)=60$ 联立，得唯一非负整数解 $P=T=2$，$V=30$. 故 $100P+10T+V=250$.



（第 15 题）

15. $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ 如图，易知三个球的球心 O,O_1,O_2 均在二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平分面 γ 上，设球 O_1 与面 α、β 分别切于点 A、B，球 O 与面 α、β 分别切于点 D、E. 作 $AC\perp l$，$DF\perp l$，垂足分别为 C，F，则 $BC\perp l$，$EF\perp l$，$\angle O_1CA=\angle OFD=30^\circ$，从而 $O_1C=2$，$OF=2R$，连接 O_1O_2 交 OF 于 H，则 H 为球 O_1 与球 O_2 的切点，且 $OH\perp O_1O_2$，$OH=2R-2$，$O_1H=1$，$OO_1=R+1$. 在 $Rt\triangle OHO_1$ 中，$OH^2+O_1H^2=OO_1^2$，即 $(2R-2)^2+1=(R+1)^2$，解得 $R=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$（小根已舍）.



（第 16 题）

16. $\frac{5\pi}{12}$ 显然三个切点 A，B，C 在球 O 的同一个大圆上（如图），由 $S_{\triangle BOC}=\frac12\times4\times4\sin\angle BOC=4$，得 $\sin\angle BOC=\frac12$，所以 $\angle BOC=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$. 若 $\angle BOC=\frac{\pi}{6}$，则 $\angle BAC=\frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{11\pi}{12}$，这时 $S_{\triangle ABC}=\frac12AB\cdot AC\sin\angle BAC<\frac12\times8\times8\times\frac12=16$，与已知矛盾，所以 $\angle BOC\neq\frac{\pi}{6}$，则只有 $\angle BOC=\frac{5\pi}{6}$，从而 $\angle BAC=\frac{5\pi}{12}$ 或 $\frac{7\pi}{12}$. 若 $\angle BAC=\frac{7\pi}{12}$，则 $\triangle ABC$ 为钝角三角形，$S_{\triangle ABC}<\frac12BC\cdot OA<\frac12\times8\times4=16$，与已知矛盾. 故只有 $\angle BAC=\frac{5\pi}{12}$.

三、解答题

17. (1) 因为 $AB=AC$，D 为 BC 的中点，所以 $AD\perp BC$，从而 $AD\perp$ 平面 BB_1C_1C，因此 DF 是 EF 在面 BB_1C_1C 上的射影.

又 $DF^2=BD^2+BF^2=5a^2$，$C_1F^2=B_1C_1^2+B_1F^2=5a^2$，$C_1D^2=CD^2+CC_1^2=10a^2$，所以 $DF^2+C_1F^2=10a^2=C_1D^2$，则 $DF\perp FC_1$，故 $EF\perp FC_1$.

(2) 由(1)知 $\angle EFD$ 为直线 EF 与平面 BB_1C_1C 所成的角，且 $DF=\sqrt5a$. 若 $\angle EFD=60^\circ$，则 $DE=$



$DF\tan60° = \sqrt{15}a$

又因为 $AB = AC = BC = 2a$，所以 $AD = \sqrt{3}a$.

而 $\sqrt{15}a > \sqrt{3}a$，所以这样的点 E 不存在.

18. (1) 因为 $DF \perp AB$，且 $\angle BAD = 90°$，所以 $ABFD$ 是矩形，从而 $CD \perp BF$.

又 $PA \perp$ 底面 $ABCD$，$CD \perp AD$，所以 $CD \perp PD$.

因为 E、F 分别为 PC、CD 的中点，所以 $EF \parallel PD$，从而 $CD \perp EF$.

故 $CD \perp$ 平面 BEF.

(2) 如图，连接 AC 交 BF 于 G，易知 G 为 AC 的中点，则 $EG \parallel PA$. 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$，所以 $EG \perp$ 底面 $ABCD$.

过 G 作 $GH \perp BD$，垂足为 H，则 $EH \perp BD$，故 $\angle EHG$ 为二面角 $E-BD-C$ 的平面角.

设 $AB = a$，则 $EG = \frac{1}{2}PA = \frac{1}{2}ka$.

由面积法容易求得 $GH = \frac{\sqrt{5}}{5}a$.

（第 18 题）

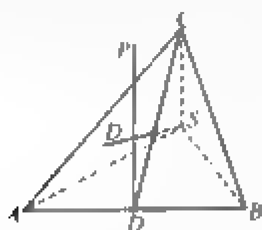
因此，$\tan\angle EHG = \frac{EG}{GH} = \frac{\sqrt{5}}{2}k$.

若 $\angle EHG > 30°$，则 $\frac{\sqrt{5}}{2}k > \tan30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $k > \frac{2\sqrt{15}}{15}$.

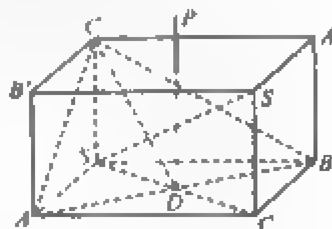
19. (1) 如图(1)，因为 $DP \parallel SC$，所以 DP 与 SC 在同一平面 α 内.

又因为 $\triangle ABC$ 的重心 G 在中线 CD 上，所以点 G 也在平面 α 上，于是 SG 与 DP 共面.

因为 $SG \nparallel DP$，所以 SG 与 DP 不平行，故直线 DP 与 SG 必相交于一点 D'.



(1)



(2)

（第 19 题）

(2) 如图(2)，因为 $SC \perp SA$，$SC \perp SB$，所以 $SC \perp$ 平面 SAB，又 $DP \parallel SC$，所以 $DP \perp$ 平面 SAB.

在 $Rt\triangle ASB$ 中，D 为斜边 AB 的中点，所以 $DA = DB = DS$，从而 $D'A = D'B = D'S$.

因为 $\triangle DD'G \backsim \triangle CSG$，所以 $\frac{GD'}{SG} = \frac{GD}{CG} = \frac{1}{2}$.

同理，过 BC 中点 E 作 SA 的平行线，必与 SG 相交于一点 E'，且 $E'B = E'C = E'S$，$\frac{GE'}{SG} = \frac{1}{2}$.

故点 E' 与 D' 重合，且 $D'A = D'B = D'C = D'S$，即点 D' 为三棱锥 $S-ABC$ 外接球球心.



20. 设六面体内切球半径为 r_1，这个六面体的体积一方面可以按表面积乘以内切球半径的 $\frac{1}{3}$ 计算，也可以按两个棱长为 a 的正面体的体积之和计算，因此有

$$\frac{1}{3}\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot r_1=2\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

解得 $r_1=\frac{\sqrt{6}}{9}a$.

设正八面体内切球半径为 r_2，同样可得 $\frac{1}{3}\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot r_2=2\times\frac{1}{3}\times a^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

解得 $r_2=\frac{\sqrt{6}}{6}a$.

故 $\frac{r_1}{r_2}=\frac{2}{3}$.

第9讲　截面问题

一、选择题

1. B. 正方体的截面可以是锐角三角形、等腰三角形、等边三角形，但不可能是钝角三角形、直角三角形；对于四边形截面，可以是梯形（等腰梯形）、平行四边形、菱形、矩形，但不可能是直角梯形；对于五边形截面，可以是任意五边形，但不可能是正五边形；对于六边形截面，可以是正六边形（如本讲例2）.这里的证明从略.

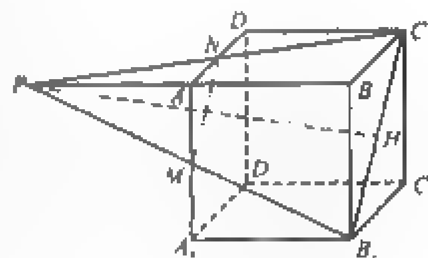
2. D. 这样的截面有两类：(1)截面的一侧有一点，另一侧有三点，这样的截面有4个，每个截面的面积均为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$；(2)截面的两侧各有两点，这样的截面有3个，都是正方形，每个截面的面积均为1. 综上所述，所有截面的面积之和为 $3+\sqrt{3}$.

3. B. 从不同的角度去观察，不难看出，截面不可能是一个圆内接正方形.

4. D. 截面投影到对角面 D_1DBB_1 上应该是一条线段.

5. D. 画图知，过 A_1、C、M 三点的截面是一个六边形.

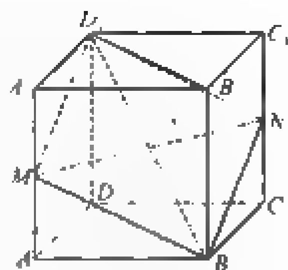
6. C. 设四棱锥的两组不相邻的侧面的交线分别为 m、n，直线 m、n 确定了一个平面 β，作与 β 平行的平面 α，使得 α 与四棱锥的各个侧面相交，则截面四边形必为平行四边形. 而这样的平面 α 可以作出无数多个，故应选 C.



（第7题）

7. C. 如图，设 $B_1M\cap BA=P$，连接 PC 交 AD 于 N，则由面 ADD_1A_1 ∥ 面 BCC_1B_1 知，$MN\parallel B_1C$，又 M 为 AA_1 的中点，所以 N 为 AD 的中点，从而截面 $MNCB_1$ 为等腰梯形. 取 B_1C 的中点 H，则 $PH\perp B_1C$，因此等腰梯形 $MNCB_1$ 的高等于 $\frac{1}{2}PH=\frac{1}{2}\sqrt{PB_1^2-B_1H^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$. 故 $S_{梯形MNCB_1}=\frac{1}{2}(MN+B_1C)\cdot\frac{1}{2}PH=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{2}$.



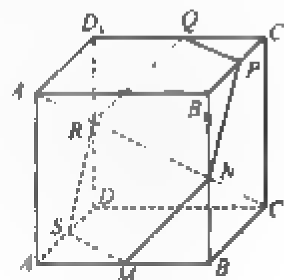


(第 8 题)

8. C 如图，已知当截面为对角面 BDD_1B_1 时，截面面积最大，最大值为 $\sqrt{2}a^2$（其中 a 为正方体棱长）；当截面分别过 AA_1、CC_1 的中点 M、N 时，截面面积最小．这时，BMD_1N 为菱形，其面积为 $\frac{1}{2}BD_1\cdot MN=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}a\cdot\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$．故 $S_{min}=\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$，$S_{max}=\sqrt{2}a^2$，即 $\frac{S_{max}}{S_{min}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

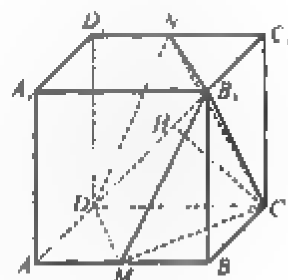
二、填空题

9. 1∶2 剩下的几何体是一个八面体，其中四个面分别是原四面体四个面的中点三角形，面积分别为原四个面面积的 $\frac{1}{4}$．又这个八面体相对的四组两个面平行且全等，所以这个八面体的表面积等于原四面体表面积的 $\frac{1}{2}$，故剩下的几何体的表面积与原四面体表面积之比为 1∶2．



(第 10 题)

10. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$．如图，设 M、N、P、Q、R、S 分别是棱 AB、BB_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1D、DA 的中点，由本讲例2知，$MNPQRS$ 是边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 的正六边形，且与对角线 A_1C 垂直．易知，这个正六边形截面的面积最大，最大值为 $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}MN^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$．



(第 11 题)

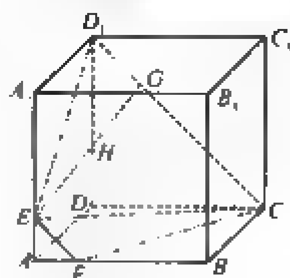
11. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 如图，连结 CN、B_1C、CM、B_1D，则 $\triangle B_1CN\cong\triangle B_1CM$，$\angle NB_1C=\angle MB_1C$，且 B_1C 的射影在 B_1D 上，所以在 $Rt\triangle B_1CD$ 中，斜边 B_1D 上的高 CH 等于点 C 到截面 MB_1ND 的距离，而 $CH=\frac{B_1C\cdot CD}{DB_1}=\frac{\sqrt{6}}{3}$．

12. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 设圆柱底面圆的半径为 r，由题设知，截面椭圆的长轴与圆柱底面所成的角为 60°，则长轴长为 $4r$．又椭圆短轴长为 $2r$，故离心率 $e=\frac{\sqrt{(2r)^2-r^2}}{2r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

13. $\frac{1}{4}$ 首先，过 MN 的平面必仅与某对棱分别交于一点，不妨设交 AB 于 E，交 CD 于 F．注意到 $S_{\triangle EMN}=\frac{1}{2}MN\cdot h_{E-MN}$ 及 $h_{E-MN}\geq h_{AB-MN}$，设 E_1 为 AB 的中点，O 为 MN 的中点，易知 OE_1 为 AB 与 MN 的公垂线段，则 $h_{AB-MN}=OE_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以 $S_{\triangle EMN}\geq\frac{1}{2}MN\cdot OE_1=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{8}$．同理 $S_{\triangle FMN}\geq\frac{1}{8}$．因此，$S_{\text{四边形}EMFN}\geq\frac{1}{4}$，当 E、F 分别为 AB、CD 的中点时，等号成立．此时，E、M、F、N 四点共面，符合条件．

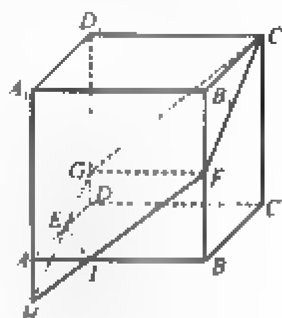


14. $60°$ 如图，因为截面 EFC_1D_1 与面 ABB_1A_1 有公共点 E，所以它们有一条交线 EF，且 $EF \parallel CD_1$，故 $EFCD_1$ 为等腰梯形. 过点 E 作 $EH \perp DD_1$，垂足为 H，则 $EH \perp$ 面 CDD_1C_1，且 $EH = 1$. 过点 H 作 $HG \perp CD_1$，垂足为 G，连接 EG，则 $EG \perp CD_1$，故 $\angle EGH$ 为二面角 $E-CD_1-D$ 的平面角. 在 $Rt\triangle EHG$ 中，$EH = 1$，$HG = \frac{\sqrt{2}}{2}D_1H = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\tan\angle EGH = \frac{EH}{HG} = \sqrt{3}$，故 $\angle EGH = 60°$.



（第 14 题）

15. $\frac{11\sqrt{29}}{48}a^2$ 如图，过点 E 作 $EG \parallel FB_1$，分别交 CC_1、DD_1 于 G、H，连接 FH 交 AD 于 I，则五边形 $EIFB_1G$ 为所求的截面. 易知 $C_1G = \frac{3}{4}a$，$DH = \frac{1}{4}a$. 从而 $B_1G = \frac{5}{4}a$，$B_1F = \frac{\sqrt{5}}{2}a$，$GF = \frac{\sqrt{33}}{4}a$，$\cos\angle GB_1F = \frac{3\sqrt{5}}{25}$，$\sin\angle GB_1F = \frac{2\sqrt{145}}{25}$，故 $S_{\triangle ...} = \frac{5}{4}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a \cdot \frac{2\sqrt{145}}{25} = \frac{\sqrt{29}}{4}a^2$. 而 $S_{\triangle ...} = \frac{1}{2}IH \cdot HE \cdot \frac{2\sqrt{145}}{25} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}B_1G \cdot \frac{1}{2}GH \cdot \frac{2\sqrt{145}}{25} = \frac{1}{12}S_{\triangle ...} = \frac{\sqrt{29}}{48}a^2$，因此，所求截面面积为 $\frac{11\sqrt{29}}{48}a^2$.

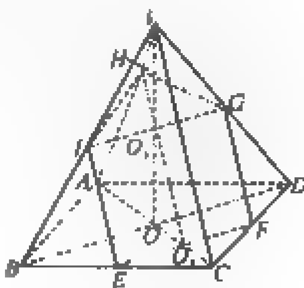


（第 15 题）

16. $9\sqrt{2}$cm. 因为三棱锥中截面面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$cm²，所以底面面积为 $9\sqrt{3}$cm²，从而底面边长为 6cm. 过顶点 P 作底面的垂线 PO，则垂足 O 为正 $\triangle ABC$ 的中心，且 $PO = 2\sqrt{6}$cm. 延长 AO 交 BC 于 E，则 $AE \perp BC$，连接 PE，有 $PE \perp BC$，所以 $BC \perp$ 平面 PAE. 又因为 $DE \subset$ 平面 PAE，所以 $DE \perp BC$，故 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot DE$. 而 $BC = 6$，所以当且仅当 $DE \perp PA$ 时，DE 最短，所以此时截面面积最小. 由面积法，得 $DE = \frac{PO \cdot AE}{PA} = 3\sqrt{2}$，故截面面积的最小值为 $9\sqrt{2}$cm².

三、解答题

17. 如图，连接 BD，则 $EF \parallel BD$. 因为所作截面 α 经过 EF 及平面 VBD 内的点 O_1，所以 α 与平面 VBD 相交于过点 O_1 的一条直线. 在平面 VBD 内过点 O_1 作 $GI \parallel BD$，分别交 VD、VB 于 G、I，则 $GI \parallel EF$，且 G、I 分别为 VD、VB 的中点. 连接 AC 交 EF 于 O_2，则 α 经过 O_1O_2. 又 O_1O_2 在面 VAC 内，设 O_1O_2 交 VA 于 H，故 $EFGHI$ 为所求作的截面. 易知 O_1 为 OC 的中点，所以 $VC \parallel HO_1O_2$. 由 $AO_2 = \frac{3}{4}AC$，得 $HO_2 = \frac{3}{4}VC = \frac{3}{4}b$. 又 $IE = GF = \frac{1}{2}VC = \frac{1}{2}b$，$EO_2 = FO_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$，且 $VC \perp BD$，所以 $HO_2 \perp EF$. 由对称性，

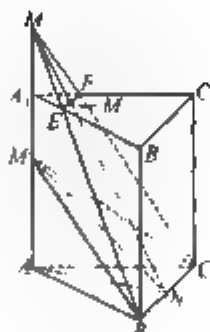


（第 17 题）

得 $S_{截面}=2 S_{\triangle EH_2 M}=2\cdot\frac{1}{2}(IE+HO_2)\cdot EO_2=\frac{3\sqrt{2}}{16}ab$

18．随着角 θ 的不同取值，截面可能为等腰三角形或等腰梯形．

当截面为等腰 $\triangle MBC$ 时，如图，取 BC 的中点 N，连接 AN、MN，则 $\angle ANM=\theta$，且 $0<\theta\leqslant\arctan\frac{h}{\sqrt{3}a}$，所以



（第18题）

$$S_{截面}=\frac{S_{\triangle ABC}}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{3}a^2}{\cos\theta}$$

当截面为等腰梯形 $BCFE$ 时，分别取 BC、EF 的中点 N、M_1，连接 NM_1 并延长交 AA_1 延长线于 M'，则 $\angle ANM'=\theta$，且 $\arctan\frac{h}{\sqrt{3}a}<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以

$$S_{截面}=S_{\triangle M'BC}-S_{\triangle M'EF}=\frac{h\left(2a-\frac{h}{\sqrt{3}\tan\theta}\right)}{\sin\theta}$$

故 $S_{截面}=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}a^2}{\cos\theta}\left(0<\theta\leqslant\arctan\frac{h}{\sqrt{3}a}\right),\\ \frac{h\left(2a-\frac{h}{\sqrt{3}\tan\theta}\right)}{\sin\theta}\left(\arctan\frac{h}{\sqrt{3}a}<\theta<\frac{\pi}{2}\right).\end{cases}$

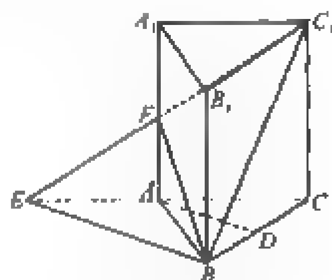
19．设 $S\text{-}ABCD$ 为已知的正四棱锥，O 为底面正方形 $ABCD$ 的中心，平面 π 平行于底面对角线 AC，点 S、A、B、C、D、O 在 π 上的射影分别为 S'、A'、B'、C'、D'、O'，四棱锥 P 的投影为 P'．因为 $AC\perp$ 平面 SBD，所以点 S'、B'、D'、O' 均在 $A'C'$ 的垂直平分线上，且 $A'B'C'D'$ 为菱形，$O'B'=OB\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$，$h'=S'O'=h\sin\alpha$．

(1) 当 $h'\leqslant O'B'$ 时，点 S' 在菱形 $A'B'C'D'$ 内或边界上，则 $S_{P'}=S_{A'B'C'D'}=S_{ABCD}\cdot\cos\alpha=4\cos\alpha$．故当 $\alpha=0$ 时，$(S_{P'})_{max}=4$．

(2) 当 $h'>O'B'$ 时，$S_{P'}=S_{\triangle S'A'C'}+S_{\triangle A'B'C'}=\sqrt{2h^2+4}\sin(\alpha+\varphi)$，其中 $\varphi=\arctan\frac{\sqrt{2}}{h}$．由 $\sqrt{2h^2+4}>4$，得 $h>\sqrt{6}$．故当 $h>\sqrt{6}$，$\alpha=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\sqrt{2}}{h}$ 时，$(S_{P'})_{max}=\sqrt{2h^2+4}$．

综上所述，$(S_{P'})_{max}=\begin{cases}4(h\leqslant\sqrt{6},\alpha=0),\\ \sqrt{2h^2+4}\left(h>\sqrt{6},\alpha=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\sqrt{2}}{h}\right).\end{cases}$

20．如图，在平面 ABC 内，过点 B 作 $BE\parallel AD$ 交 CA 延长线于 E，连接 C_1E 交 AA_1 于 F，连接 BF，则 $\triangle BC_1F$ 为平行 AD 的平面截三棱柱所得的截面．



（第20题）

因为 $BC\perp AD$，$BE\parallel AD$，所以 $BC\perp BE$．

又 $C_1C\perp$ 平面 BCE，所以 $BC_1\perp BE$（三垂线定理）．

故 $\angle C_1BC$ 为截面与底面所成二面角的平面角，即 $\angle C_1BC=\beta$．



设 $BC=a$，则 $AB=AC=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

又 $S=\left(a+2\cdot\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)\cdot C_1C$，所以 $C_1C=\frac{S\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{a\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$.

在 Rt△BCC_1 中，$C_1C=BC\tan\beta=a\tan\beta$.

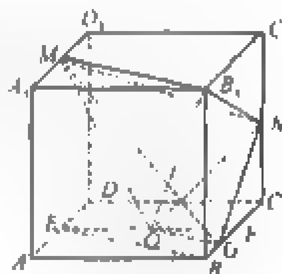
从而 $\frac{S\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{a\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=a\tan\beta$，得 $a^2=\frac{S\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\tan\beta}$，又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{4}a^2\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{S\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{4\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\tan\beta}$，所以

$$S_{\triangle ABC_1}=\frac{S_{\triangle ABC}}{\cos\beta}=\frac{S\cos\frac{\alpha}{2}}{4\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sin\beta}$$

第 10 讲　几何体的面积和体积

一、选择题

1. D. 如图，过点 O 作 AB 的平行线，分别交 AD、BC 于 E、F，取 BF 的中点 G，连接 OG、BE，则 $OG\parallel BE$. 因为 $BE\parallel B_1M$，所以 $BE\parallel$ 平面 MNB_1，从而 $OG\parallel$ 平面 MNB_1，于是 $V_{O-MNB_1}=V_{G-MNB_1}=V_{M-NB_1G}$. 易知 $S_{\triangle NB_1G}=S_{\square BCC_1B_1}-S_{\triangle B_1C_1N}-S_{\triangle NCG}-S_{\triangle GBB_1}=\frac{7}{16}$，点 M 到平面 NB_1G 的距离为 1，故 $V_{M-NB_1G}=\frac{1}{3}\times\frac{7}{16}\times1=\frac{7}{48}$，即 $V_{O-MNB_1}=\frac{7}{48}$.



（第 1 题）

2. A. 取 BC 的中点 H，连接 AH，因为 $AB=BC$，$\angle ABC=60^\circ$，所以 $AH\perp BC$，从而 $AH\perp$ 面 $BCEF$. 又 $S_{\triangle ABC}=BC^2\sin60^\circ=2\sqrt{3}$，所以 $BC=CA=AB=2$，则 $AH=\sqrt{3}$. 又 $CE=BC=2$，$BF=\frac{1}{2}BC=1$，故 $V_{A-BCEF}=\frac{1}{3}S_{梯形BCEF}\cdot AH=\sqrt{3}(\text{cm}^3)$.

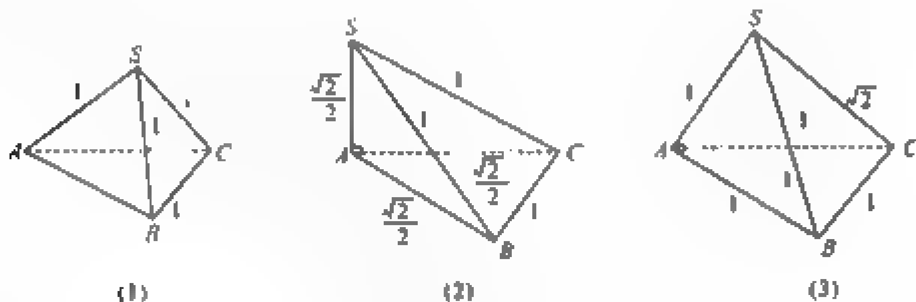
3. C. 因为 $BC\perp$ 面 ABB_1A_1，$CD\perp$ 面 ADD_1A_1，所以 $BC\perp A_1B$，$CD\perp A_1D$，从而 $S_{\triangle A_1BC}=\frac{1}{2}BC\cdot A_1B=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$，$S_{\triangle A_1CD}=\frac{1}{2}CD\cdot A_1D=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. 又 $\triangle A_1BD$ 是边长为 $\sqrt{2}a$ 的正三角形，所以 $S_{\triangle A_1BD}=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$，故 $S_{表}=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2+\frac{\sqrt{2}}{2}a^2+\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}a^2$.

4. D. 过点 F 作 $FM\parallel EA$ 交 AB 于 M，作 $FN\parallel ED$ 交 CD 于 N，则多面体 $ABCDEF$ 被分割为一个三棱柱和一个四棱锥，分别计算相加，得 $V=\frac{1}{2}\times3\times2\times\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\times3\times\frac{3}{2}\times2=\frac{15}{2}$.



5. B. 作 $PO\perp$ 面 ABC，垂足为 O. 再过 O 点分别作 $OD\perp BC$，$OE\perp CA$，$OF\perp AB$，垂足分别为 D、E、F，设 $PO=h$，则 $\angle PDO=45^\circ$，$\angle PEO=45^\circ$，$\angle PFO=45^\circ$. 于是，$OD=h\cot45^\circ=h$，$OE=h\cot45^\circ=h$，$OF=h\cot45^\circ=h$. 在 $\triangle ABC$ 中，由面积法，得 $3OD+4OE+5OF=12$，即 $3h+4h+5h=12$，$h=1$. 故 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times6\times1=2$.

6. C. 如图(1)，若 $SA=SB=SC=BC=1$，$SA\perp SB$，$SA\perp SC$，则 $V_{S-ABC}=V_{A-SBC}=\frac{\sqrt{3}}{12}$；如图(2)，若 $SB=SC=BC=1$，$SA=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$SA\perp AB$，$SA\perp AC$，则 $V_{S-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot SA=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{24}$；如图(3)，若 $SA=SB=AB=1$，$SC=\sqrt{2}$，$SA\perp AC$，$SB\perp BC$，则 $V_{S-ABC}=V_{A-SBC}=\frac{\sqrt{2}}{12}$.



（第 6 题）

7. D. 设长方体 A 的底面两边长分别为 a_1 和 a_2，长方体 B 的底面两边长分别为 b_1 和 b_2，依题意得 $\frac{1}{k}\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}=\frac{a_1a_2}{b_1b_2}$，即 $b_1+b_2=k(a_1+a_2)$，$b_1b_2=ka_1a_2$，则 b_1、b_2 为关于 t 的方程 $t^2-k(a_1+a_2)t+ka_1a_2=0$ 的两个根，故 $\Delta=k^2(a_1+a_2)^2-4ka_1a_2\geqslant0$，即 $k\geqslant\frac{4a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}$ 恒成立. 于是 $k\geqslant\left[\frac{4a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}\right]_{max}=1$.

8. C. 设 $AB=a$，$AD=b$，$AA_1=c$，则 $d=AC_1=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 若取 $a=b=c=1$，则 $d=\sqrt{3}$，有 $d^3=3\sqrt{3}>3=a^3+b^3+c^3$，这可排除 A、B. 下面证明 C 成立. $a^3=a^2\cdot a<a^2\sqrt{a^2+b^2+c^2}=a^2d$，同理 $b^3<b^2d$，$c^3<c^2d$. 相加得 $a^3+b^3+c^3<d^3$. 两边同乘以 $\frac{4}{3}\pi$ 得 $V_1+V_2+V_3<V_4$.

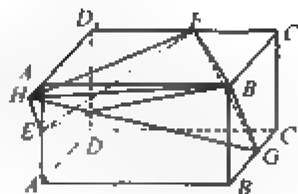
二、填空题

9. $\frac{1}{9}$. 依题意，原三棱锥底面边长为 $\sqrt{2}$，则底面面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，高为 $h=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 旋转后的三棱锥与原三棱锥公共部分是一个正六棱锥，其底面面积是原三棱锥底面面积的 $\frac{2}{3}$，高没有



改变,故公共部分体积为$V=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{9}$.

10. $\frac{3}{8}$ 如图,在D_1A_1的延长线上取一点H,使$A_1H=\frac{1}{4}$,易证$HE\parallel B_1G$,则$HE\parallel$平面B_1FG.所以$V_{B_1-EFG}=V_{E-B_1FG}=V_{H-B_1FG}=V_{G-B_1FH}$.又$S_{\triangle B_1FH}=\frac{9}{8}$,点$G$到平面$B_1FH$的距离为1,故$V_{G-B_1FH}=\frac{1}{3}\times\frac{9}{8}\times1=\frac{3}{8}$.



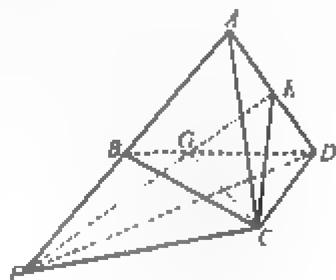
(第10题)

11. $\frac{\sqrt{2}}{24}\pi a^3$ 设球心为O,半径为r,球的体积为V,正四面体$ABCD$的面BCD的中心为O_1,棱BC的中点为E,则$AO_1=\frac{\sqrt{6}}{3}a$.又$OA=OB$,由$OB^2=O_1O^2+O_1B^2=(AO_1-AO)^2+O_1B^2=(AO_1-OB)^2+O_1B^2$,得$\frac{2}{3}a^2-\frac{2\sqrt{6}}{3}a\cdot OB+\frac{1}{3}a^2=0$,则$OB=\frac{\sqrt{6}}{4}a$.从而$r=OE=\sqrt{OB^2-BE^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}a$,故$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{\sqrt{2}}{24}\pi a^3$.

12. 10. 因为$PA=PB=PC$,所以点P在平面ABC上的射影为$\triangle ABC$的外心O,即$PO\perp$平面ABC,且PO的长等于球O的半径R.故$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PO=\frac{1}{3}\cdot\frac{abc}{4R}\cdot R=10$.

13. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h_2$ 由于$h_1+h_3=2h_2$,将两个如题图所示的几何体拼成一个正三棱柱,则这个正三棱柱的底面边长为a,侧棱长为$h=2h_2$,体积为$V=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot2h_2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2h_2$.故剩下一块几何体的体积为$\frac{1}{2}V=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h_2$.

14. $\frac{V}{3}$ 如图,因为B是AF的中点,所以$V_{A-BCD}=V_{F-BCD}$.在$\triangle ABD$中,由梅涅劳斯定理,得$\frac{BG}{GD}\cdot\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$,因此$\frac{BG}{GD}=\frac{1}{2}$.



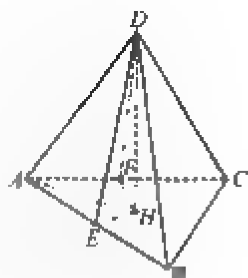
(第14题)

所以$S_{\triangle DEG}=\frac{1}{2}DE\cdot DG\sin\angle ADB=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}$,故$V_{C-DEG}=\frac{1}{3}V_{C-ABD}=\frac{V}{3}$.

15. $\frac{18}{5}$ 首先证明四面体$ABCD$的高DH为另一个球的一条直径.如图,设$DE\perp AB$,$DF\perp AC$,垂足分别为E,F,则$AE=AF=AD\cos\angle BAD=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,$\cos\angle HAE=\cos\angle HAF=\sqrt{\frac{1+\cos\angle BAC}{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,从而$AH=\frac{AE}{\cos\angle HAE}=\sqrt{5}$,$DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=2$.因此,四面体外接球的中心在$DH$上



所以 $AD = BD = CD$，则 $AC = AB = 2AF = 3\sqrt{2}$，$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot AB\sin\angle BAC = \frac{27}{5}$，故 $V_{D-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{27}{5} \times 2 = \frac{18}{5}$



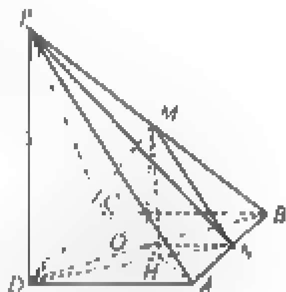
（第 15 题）

16．$18 + 3\sqrt{3}$ 由题设知，T_1，T_3，… 为正方体，T_2，T_4，… 为正八面体．设 T_1 的棱长为 a，易知 $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$，$a_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}a$，且对于任意正数 n，有 $a_{2n} = \frac{\sqrt{2}}{2}a_{2n-1}$，$a_{2n+1} = \frac{\sqrt{2}}{3}a_{2n}$．而 $S_1 = 6a^2$，$S_2 = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a_2^2 = \sqrt{3}a_2^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}S_1$，$S_3 = 6 \times \frac{2}{9}a^2 = \frac{4}{3}a^2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}S_2$．同理 $S_{2n} = \frac{\sqrt{3}}{6}S_{2n-1}$，$S_{2n+1} = \frac{2\sqrt{3}}{9}S_{2n}$，于是 $\frac{S_{2n+1}}{S_{2n-1}} = \frac{1}{9}$，$\frac{S_{2n+2}}{S_{2n}} = \frac{1}{9}$，故 $\lim(S_1 + S_2 + \cdots + S_n) = \frac{S_1}{1-\frac{1}{9}} + \frac{S_2}{1-\frac{1}{9}} = 18 + 3\sqrt{3}$

二、解答题

17．(1) 如图，设 AC 与 BD 相交于 O，连接 MO，则 $MO \parallel PD$．因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$，所以 $MO \perp$ 平面 $ABCD$，且 $MO = \frac{1}{2}PD = 3$．又 N 为 AB 的中点，所以 $S_{\triangle DNB} = \frac{1}{2}S_{\triangle DAB} = 4$．

故 $V_{P-DMN} = V_{P-DNB} - V_{M-DNB} = \frac{1}{3}S_{\triangle DNB} \cdot (PD - MO) = 4$．



（第 17 题）

(2) 过点 O 作 $OH \perp DN$，垂足为 H，连接 MH，则 $MH \perp DN$，故 $\angle MHO$ 为二面角 $M - DN - C$ 的平面角．

连接 ON，易得 $S_{\triangle ODN} = \frac{1}{2}S_{\triangle DNB} = \frac{1}{2}$．

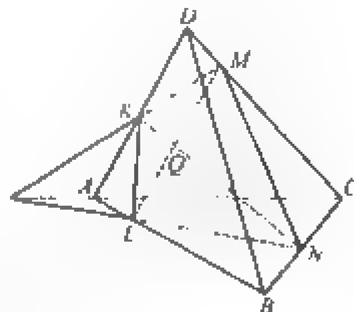
又 $DN = \sqrt{AD^2 + AN^2} = 2\sqrt{5}$，所以 $OH = \frac{2S_{\triangle ODN}}{DN} = \frac{2}{\sqrt{5}}$．

故 $\tan\angle MHO = \frac{MO}{OH} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$．

18．(1) 利用简单的引理：如果线段 FG 和平面 α 交于点 H，且 h_F，h_G 分别是点 F 和点 G 到平面 α 的距离，那么 $\frac{FH}{HG} = \frac{h_F}{h_G}$．

设 h_A，h_B，h_C，h_D 分别是点 A，B，C，D 到平面 $KLNM$ 的距离，如图，利用引理可得 $h_A = h_D$，$h_B = h_C$，所以

$$\frac{DM}{MC} = \frac{h_D}{h_C} = \frac{h_A}{h_B} = \frac{AL}{LB}$$



（第 18 题）

(2) 用 β 表示平行于异面直线 AB 与 CD，且与此二异面直线等距离的一个平面．因为从点 A 和 D 到平面 β 的距离相等，据引理，平面 β 把线段 AD 分成为二等分，即 $K \in \beta$．同理 $N \in \beta$．因此 $KN \subset \beta$．所以 LM 与

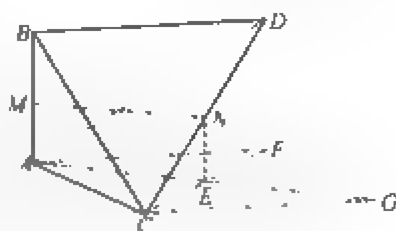


平面β交于点$Q=KN\cap LM$.

因为点M和L到平面β的距离相等,据引理,$MQ=QL$.又据平面上的类似引理,从点M和L到KN的距离也相等.所以

$$S_{\triangle KLN}=S_{\triangle KMN}$$

19. 如图,过直线AC作平行于直线BD的平面α,于是,平面α与直线MN平行(直线MN上所有的点到平面α的距离都相等),设$AF \parallel BD$,$AE \parallel MN$,那么AB与平面α上的直线AC、AF、AE所成的角都相等.于是,点B到这三条直线的距离相等.点B在平面α上的射线既在$\angle FAE$的平分线上,也在$\angle EAC$的平分线上,于是点B的射影是A,则$AB\perp$平面α.



(第19题)

因为$AF=7$,$AE=2$,AF、AE分别是BD、MN在平面α上的射影,所以E是CF的中点.延长AE到G,使$EG=AE$,连接CG,则

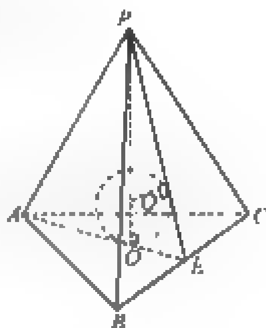
$S_{\triangle ACF}=2S_{\triangle ACE}=S_{\triangle ACG}=\sqrt{8(8-7)(8-4)(8-5)}=4\sqrt{6}$

又$S_{\triangle ACE}=S_{\triangle AEF}$,所以

$V_{ABMN}=V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACF}\cdot DF$

$$=\frac{1}{3}\times4\sqrt{6}\times3=4\sqrt{6}$$

20. 如图,正三棱锥$P-ABC$内有一内切球,由对称性知,球心Q一定在三棱锥的高PO上,设BC的中点为E,则$PE\perp BC$,$AE\perp BC$,故$\angle PEA$是侧面与底面所成二面角的平面角,即$\angle PEA=\frac{\pi}{3}$.



(第20题)

因为$P-ABC$是正三棱锥,所以点P在底面ABC内的射影在AE上,故球心Q在平面PAE内,由此可知,三棱锥$P-ABC$的截面$\triangle PAE$必过球心Q,故截球得一大圆Q.显然,$\odot Q$与PE、AE相切,O为切点,故EQ平分$\angle PEA$.

设正三棱锥底面边长为1,则$OE=\frac{\sqrt{3}}{6}$,故$r=QO=OE\tan30^\circ=\frac{1}{6}$.于是,球的体积$V_{球}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{162}\pi$.

又$PO=OE\tan60^\circ=\frac{1}{2}$,所以

$$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PO=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{24}$$

故$V_{P-ABC}:V_{球}=\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$.

反之,设三棱锥侧面与底面所成角为2θ,用r表示球的半径,a表示OE的长,则

$$r=a\tan\theta,PO=a\tan2\theta,BC=2\sqrt{3}a$$

从而$V_{球}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi a^3\tan^3\theta$,



$$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2\cdot PO=\sqrt{3}a^3\tan2\theta.$$

由 $V_{P-ABC}:V_{球}=\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$，得

$$\tan^4\theta-\tan^2\theta+\frac{2}{9}=0.$$

解得 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\tan\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$

因此 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\theta=\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}$，而 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 或 $2\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故满足所求比值的角不一定是 $\frac{\pi}{3}$

第11讲　多面角、折叠与展开

一、选择题

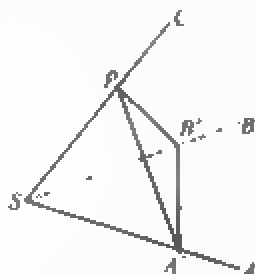
1. B. 因为 $45°+65°<120°$，$56°+26°=82°$，所以根据三面角的性质1，可排除A、C. 又 $130°+120°+116°>360°$，因此由性质2可排除D.

2. A. 当 P 点越靠近 A 点时，$\angle BPC$ 趋近于 $\angle BAC$；当 P 点越远离 A 点时，$\angle BPC$ 越来越小，并且趋近于 $0°$，故 $\angle BAC>\angle BPC$.

3. C. 设正面体 $ABCD$ 的棱长为 a，过点 A 作 $AO\perp$ 面 BCD，垂足为 O，则 $\angle ABO$ 为直线 AB 与平面 BCD 所成的角，且 $AO=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，故 $\sin\angle ABO=\frac{AO}{AB}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

4. C. 如图，在射线 SC 上取一点 P，使 $SP=1$，在面 BSC 和面 ASC 内，过点 P 分别作 SC 的垂线，交 SA 于 A'，交 SB 于 B'，则由 $\angle ASC=\angle BSC=45°$，得 $PA'=PB'=1$，$SA'=SB'=\sqrt{2}$. 又 $\angle A'SB'=60°$，所以 $A'B'=\sqrt{2}$. 从而 $PA'^2+PB'^2=2=A'B'^2$，故二面角 $A-SC-B$ 的平面角 $\angle A'PB'=90°$

5. A. 在正方形 $SG_1G_2G_3$ 中，$\angle SG_1E=\angle SG_3F=90°$，所以折叠后仍有 $\angle SGE=\angle SGF=90°$，即 $SG\perp EG$，$SG\perp FG$，故 $SG\perp$ 平面 GEF.



(第4题)



(第6题)

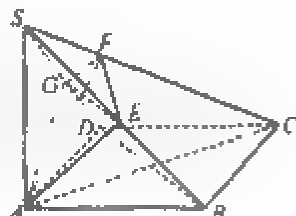
6. D. 如图，取 CM 的中点 D，连接 AD，由 $CM=AM$，$\angle CAM=60°$，得 $AD\perp CM$. 在 $\triangle BCM$ 中，作 $DE\perp CM$ 交 AC 于 E，连接 AE，则 $AE\perp CM$，$AD=\sqrt{3}$，$DE=CD\tan30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$CE=2DE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中，$AC=2$，$AB=2\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{3}$，所以 $AC^2+AB^2=BC^2$，从而 $\angle BAC=90°$. 又 $AC^2=4$



$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 2\sqrt{3}=CE\cdot BC$，所以 $AE\perp BC$，且 $AE=\frac{AC\cdot AB}{BC}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$．由 $AE\perp BC$，$AE\perp CM$，得 $AE\perp$ 平面 BCM．故 $V_{A-BCM}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCM}\cdot AE=\frac{2\sqrt{2}}{3}$．

7．D．过点 O 作 $OE\perp BD$，垂足为 E，连接 $A'E$，由三垂线定理，得 $A'E\perp BD$．所以 $\angle A'EO$ 为二面角 $A'-BD-C$ 的平面角．在 $Rt\triangle A'BD$ 中，由面积关系，得 $A'E=\frac{A'B\cdot A'D}{BD}=\frac{12}{5}$．在 $Rt\triangle A'ED$ 中，$DE=\sqrt{A'D^2-A'E^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{9}{5}$．又由 $Rt\triangle DEO\backsim Rt\triangle DCB$，得 $\frac{OE}{DE}=\frac{BC}{CD}=\frac{3}{4}$，所以 $OE=\frac{3}{4}DE=\frac{27}{20}$，故 $\cos\angle A'EO=\frac{OE}{A'E}=\frac{9}{16}$．



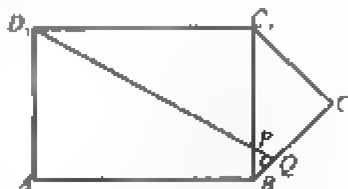
(第 8 题)

8．A．由题设知 F，G 分别为侧棱 SB，SD 的中点，则 $FG=\frac{1}{2}BD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$．连接 AC，AE，则 $SA\perp AC$，$AE\perp SC$．在 $\triangle SAC$ 中，由面积关系，得 $AE=\frac{SA\cdot AC}{SC}=\frac{a\cdot\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$．由对称性知，$AE\perp FG$，所以 $S_{AFEG}=\frac{1}{2}AE\cdot FG=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$．又由射影定理，得 $SE=\frac{SA^2}{SC}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$．故 $V_{S-AFEG}=\frac{1}{3}S_{AFEG}\cdot SE=\frac{a^3}{18}$．

二、填空题

9．$\frac{1}{2}$．过点 P 作 $PH\perp$ 平面 ASB，垂足为 H．再过点 H 分别作 $HD\perp SA$，$HE\perp SB$，垂足分别为 D，E．连接 PD，PE，则 $PD\perp SA$，$PE\perp SB$．从而 $SD=SP\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$SE=SP\cos60^\circ=\frac{1}{2}$．又 SDHE 为长方形，所以 $SH=\sqrt{SD^2+SE^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $PH=\sqrt{SP^2-SH^2}=\frac{1}{2}$．

10．$\frac{\sqrt{3}}{3}$．设折叠后 A，B 两点重合于 P，则 $PE\perp PC$，$PE\perp PD$，所以 $PE\perp$ 平面 PCD，且 $PC=PD=CD=2$，$PE=1$．故四面体的体积为 $V_{E-PCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle PCD}\cdot PE=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times 1=\frac{\sqrt{3}}{3}$．



(第 11 题)

11．$2+\sqrt{2}$．如图，将 $\triangle BCC_1$ 沿 BC_1 折起铺平在正方体的对角面 ABC_1D_1 所在平面内，这时 $ABCC_1D_1$ 是一个五边形．过 D_1 点作 $D_1Q\perp BC$，垂足为 Q，且交 BC_1 于 P．显然，$D_1P+PQ=D_1Q$ 最小．在直角梯形 D_1QCC_1 中，$\angle C_1D_1Q=45^\circ$，则 $D_1Q=CC_1+C_1D_1\cos45^\circ=\sqrt{2}+2$．

12．$\frac{\sqrt{6}}{8}\pi$．由 $AE\underline{\parallel}DC$ 知，AECD 为平行四边形，从而 $\angle CEB=\angle DAB=\angle CBE=60^\circ$，所以 $CE=CB=BE$．同理 $DA=DE=AE$．从而三棱锥 $P-CDE$ 为正四面体，且棱长为 1．把正四面体 $P-CDE$ 放入一个正方体，使正四面体的各棱是正方体的一条面对角线，则该正方体的棱长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，正方体的体对角线的长度为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，从而正方体外接球(也是正四面体 $P-CDE$ 的外



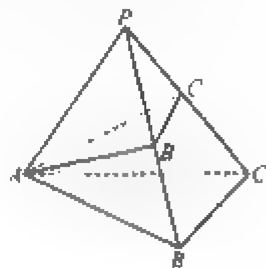
接球）的半径为$\frac{\sqrt{6}}{4}$，故该正四面体外接球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3=\frac{\sqrt{6}}{8}\pi$.

13. 15°或75° 在Rt△ABC中，设$AC=1$，$\angle ACD=\angle ABC=\theta$，则$BC=\cos\theta$，$AB=\sin\theta$，$AD=\sin^2\theta$，$BD=\cos^2\theta$. 折起后，$AB=\sqrt{\sin^4\theta+\cos^4\theta}$，由余弦定理，得$\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta-(\sin^4\theta+\cos^4\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{4}$，

化简得$\sin 2\theta=\frac{1}{2}$，所以$2\theta=30°$或$150°$，即$\theta=15°$或$75°$.

14. $\sqrt{26}$ 沿棱l将半平面β翻折，使之与半平面α在同一平面内，这时连接AC交l于M，则$AM+CM$最小，最小值为$AC=\sqrt{(2+3)^2+1^2}=\sqrt{26}$.

15. $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ 如图，设三棱锥的三条棱长分别为a,b,c，则有



$$\begin{cases}\frac{1}{2}ab\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \frac{1}{2}bc\sin 60°=2,\\ \frac{1}{2}ca\sin 60°=1,\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=1,\\ b=2,\\ c=\frac{4\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$$

不妨设$PA=1$，分别在PB、PC上取点B'、C'，使$PB'=PC'=1$，则$P-AB'C'$是棱长为1的正四面体，易知这个正四面体的高为$h=\frac{\sqrt{6}}{3}$，即点A到平面PBC的距离为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，故

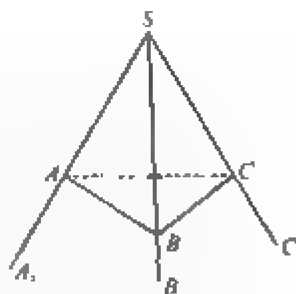
（第15题）

$V_{P-ABC}=V_{A-PBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle PBC}\cdot h=\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

16. $\frac{1}{12}(2-\sqrt{3})\sqrt{1+\sqrt{3}}a^3$ 在正三棱锥的侧面三角形中，由余弦定理，得$b^2=2a^2-2a^2\cos 30°=(2-\sqrt{3})a^2$，所以$b=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})a$，从而高$h=\sqrt{a^2-\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{a^2-\frac{2-\sqrt{3}}{3}a^2}=\frac{1}{3}\sqrt{3+3\sqrt{3}}a$，故此三棱锥的体积为$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}b^2\cdot h=\frac{1}{12}(2-\sqrt{3})\cdot\sqrt{1+\sqrt{3}}a^3$.

三、解答题

17. 如图，设三面角$S-ABC$中，面$BSC\perp$面CSA，现分三种情况证明如下：



（第17题）

(1) 若平面$ABC\perp SC$，则$SC\perp AC$，$SC\perp BC$，所以$\angle ACB$为二面角$A-SC-B$的平面角. 由题设知$\angle ACB=90°$，因此，截面$\triangle ABC$为直角三角形.

(2) 若平面$ABC\perp SA$，则过SA的平面$ASC\perp$平面ABC. 又平面$SBC\perp$平面ASC，而$AC\subset$平面ASC内，所以$BC\perp AC$，故$\triangle ABC$为直角三角形.

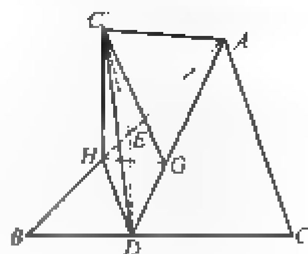
(3) 若平面$ABC\perp SB$，仿(2)可证$BC\perp AC$，则截面ABC是直角三角形.

18. (1) 如图，连接DH，因为$C'H\perp$平面ABD，所以$\angle C'DH$是$C'D$与平面ABD所成的角，且平



面 $C'HA \perp$ 平面 ABD.

过 D 作 $DE \perp AH$，垂足为 E，则 $DE \perp$ 平面 $C'HA$，所以 $\angle DC'E$ 为 $C'D$ 与平面 $C'HA$ 所成的角.



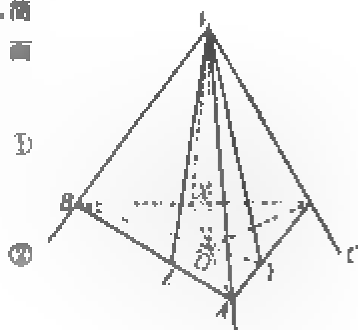
(第18题)

因为 $\sin\angle DC'E = \frac{DE}{C'D} \leqslant \frac{DH}{C'D} = \sin\angle DC'H$，所以 $\angle DC'E \leqslant \angle DC'H$.

故 $\angle DC'E + \angle C'DE \leqslant \angle DC'H + \angle C'DH = 90^\circ$.

(2) 如图，作 $HG \perp AD$，垂足为 G，连接 $C'G$，则 $C'G \perp AD$，所以 $\angle C'GH$ 是二面角 $C'-AD-H$ 的平面角，即 $\angle C'GH = 60^\circ$，计算得 $\tan\angle BAD = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

19. 如图，考虑三面角 $V-ABX$ 和截面 VCO. 在三面角 $V-ABX$ 中，简记二面角为 $X-VC-O$ 为 C，$C-VO-X$ 为 O，$A-VZ-O$ 为 Z，则二面角 $B-VZ-O$ 为 $\pi-Z$. 在三面角 $V-BZC$ 中，由正弦定理，得



(第19题)

$$\frac{\sin\angle BVC}{\sin\angle ZVB} = \frac{\sin(\pi-Z)}{\sin C} = \frac{\sin Z}{\sin C}. \quad ①$$

同理，在三面角 $V-XOC$ 中，有

$$\frac{\sin\angle XVO}{\sin\angle CVX} = \frac{\sin C}{\sin O}. \quad ②$$

在三面角 $V-AOZ$ 中，有

$$\frac{\sin\angle AVZ}{\sin\angle OVA} = \frac{\sin O}{\sin Z}. \quad ③$$

① · ② · ③ 得 $\frac{\sin\angle BVC}{\sin\angle CVX} \cdot \frac{\sin\angle XVO}{\sin\angle OVA} \cdot \frac{\sin\angle AVZ}{\sin\angle ZVB} = 1$.

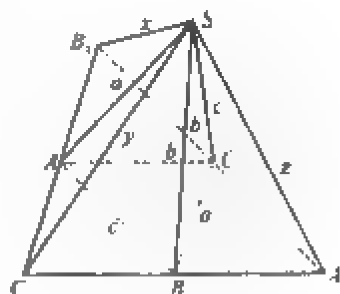
同理，对于三面角 $V-AXC$ 和截面 VBO，有

$$\frac{\sin\angle CVY}{\sin\angle YVA} \cdot \frac{\sin\angle AVO}{\sin\angle OVX} \cdot \frac{\sin\angle XVB}{\sin\angle BVC} = 1$$

将上面两式相乘，即得所要证明的结论.

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 所在平面内，分别过点 A、B、C 作 BC、CA、AB 的平行线，设这三条平行线交于点 A_1、B_1、C_1，连接 SA_1、SB_1、SC_1，A、B、C 分别为 B_1C_1、C_1A_1、A_1B_1 的中点，则

$$B_1C_1 = 2a, C_1A_1 = 2b, A_1B_1 = 2c.$$



(第20题)

从而 $S_{\triangle A_1B_1C_1} = 4S_{\triangle ABC}$，$V_{S-A_1B_1C_1} = 4V_{S-ABC}$.

由 $AS = AB_1 = AC_1 = a$，知 $\angle C_1SB_1 = 90^\circ$.

同理，$\angle C_1SA_1 = 90^\circ$，$\angle A_1SB_1 = 90^\circ$.

设 $SB_1 = x$，$SC_1 = y$，$SA_1 = z$，则 $V_{S-A_1B_1C_1} = \frac{1}{6}xyz$.

另一方面，由勾股定理，得

$$x^2 + y^2 = 4a^2, y^2 + z^2 = 4b^2, z^2 + x^2 = 4c^2.$$



因此，$x^2+y^2+z^2=2(a^2+b^2+c^2)$，

从而，$x^2=2(a^2+c^2-b^2)$，$y^2=2(a^2+b^2-c^2)$，$z^2=2(b^2+c^2-a^2)$，

于是，$x^2y^2z^2=8(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$，

即 $xyz=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}$，

故 $V_{S-ABC}=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}$。

第12讲　最值与不等式问题

一、选择题

1. A. 设大球的最小半径为R，要使大球半径最小，则四个小球必两两外切且都与大球相切. 从而四个小球的球心构成一个棱长为2的正四面体. 设小球球心与大球球心的距离为a，则$a=R-1$. 易知$a=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故$R=1+\frac{\sqrt{6}}{2}$.

2. D. 设四面体$ABCD$中，$AB=b$，$AC=BC=BD=CD=AD=a$，取CD中点E，连接AE，BE，易知$CD\perp$面ABE，则该四面体的体积$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABE}\cdot CD=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AE\cdot BE\sin\angle AEB\cdot CD\leqslant\frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\cdot a=\frac{1}{8}a^3$，当且仅当$AE\perp BE$时，上面的等号成立.

3. B. 设E为AC的中点，则$\angle BED$为二面角$A-BD-C$的平面角，设$\angle BED=\theta$. 取BD的中点F，则EF的长为直线AC与BD的距离. (1)若$\angle A=60°$，则$EB=ED=\frac{a}{2}$，当$\angle BED=\frac{\pi}{3}$时，$EF=\frac{\sqrt{3}}{4}a$；当$\angle BED=\frac{2\pi}{3}$时，$EF=\frac{a}{4}$. (2)若$\angle A=\frac{2\pi}{3}$，则$EB=ED=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，当$\angle BED=\frac{\pi}{3}$时，$EF=\frac{3}{4}a$；当$\angle BED=\frac{2\pi}{3}$时，$EF=\frac{\sqrt{3}}{4}a$. 综合(1)、(2)知，$EF$的最大值为$\frac{3}{4}a$.

4. C. 将长方体的表面沿某条棱剪开展平在一个平面上，由两点间线段最短原理知，由A到C'的较短距离分别为：$l_1=\sqrt{a^2+(b+c)^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$，$l_2=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ac}$，$l_3=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab}$. 因为$a<b<c$，所以$ab<ac<bc$，故$l_3<l_2<l_1$，即$l_3=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab}$为最小.

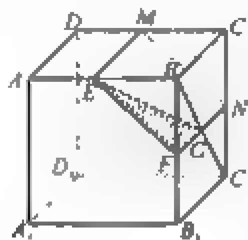
5. C. P、Q两点间的最短距离即为异面直线BD与SC的距离. 设底面正方形$ABCD$的中心为O，则$BD\perp$平面SOC. 过点O作$OM\perp SC$，垂足为M，则OM的长即为所求. 因为$SO=2$，$OC=1$，所以$SC=\sqrt{5}$. 由$SO\cdot OC=SC\cdot OM$得$OM=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

6. D. 因为$AB\perp OB$，$AB\perp OP$，所以$AB\perp PB$. 又$OH\perp PB$，则面$PAB\perp$面POB，从而$OH\perp HC$，$OH\perp PA$. 又C为PA的中点，则$OC\perp PA$，所以PC是三棱锥$P-HOC$的高，且$PC=2$. 在$\text{Rt}\triangle OHC$中，$OC=2$，所以当$HO=HC$时，$S_{\triangle HOC}$最大，也即$V_{O-HPC}=V_{P-HOC}$最大. 此时，$HO=\sqrt{2}$，则$HO=\frac{1}{2}OP$，故$\angle HPO=30°$，所以$OB=OP\tan30°=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

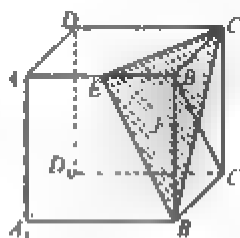


7. C. 由题设知,四面体 $ABCD$ 的四个面是全等的三角形,设各面面积为 S,由面积射影定理,得 $S = S\cos\alpha + S\cos\beta + S\cos\gamma$,则 $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$. 由柯西不等式,得 $3(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \geqslant (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 = 1$,故 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqslant \frac{1}{3}$.

8. C. 用递推代入法. 若选 D,相当于去掉小三棱锥 $E-BFG$ 的体积 $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{48}$(如图(1)). 但水是液体,液面会形成一个过 $\triangle EFG$ 的四边形 $EFNM$ 截面,此时容积只能为 $1 - V_{BEF-CMN} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{7}{8}$. 若使液面调整为 $\triangle EB_1C$(如图(2)),则容积为 $1 - V_{E-BB_1C} = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{11}{12}$,故应选 C.



(1)



(2)

(第 8 题)

二、填空题

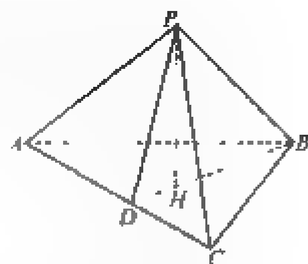
9. $(0, \pi - \arccos\frac{1}{3}]$. 显然,$\angle PSQ > 0$. 当 P,Q 与底面一对角线的两个端点重合时,$\angle PSQ$ 有最大值. 这时 $PQ = \sqrt{2}a$,$SP = SQ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,由余弦定理,得 $\cos\angle PSQ = \frac{SP^2 + SQ^2 - PQ^2}{2SP \cdot SQ} = -\frac{1}{3}$,即 $\angle PSQ = \pi - \arccos\frac{1}{3}$.

10. $16\sqrt{2}$. 设长方体的长、宽、高分别为 x、y、z,则 $xy = 4$,且 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$,所以 $16 - z^2 = x^2 + y^2 \geqslant 2xy = 8$,即 $0 < z \leqslant 2\sqrt{2}$,当且仅当 $x = y = 2$ 时,$z_{max} = 2\sqrt{2}$. 从而 $S_侧 = 2(x + y)z = 2z\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} = 2z\sqrt{(16 - z^2) + 8} = 2\sqrt{z^2(24 - z^2)} = 2\sqrt{-(z^2 - 12)^2 + 144}$,此函数在 $(0, 2\sqrt{2}]$ 上是增函数,故当 $z = 2\sqrt{2}$ 时,$(S_侧)_{max} = 16\sqrt{2}$.

11. 7. 在四面体的四个面上,连接各边的中点,将这个四面体分为 4 个小四面体和 1 个中心八面体,在此八面体中只需有 3 个点,则必有两点的距离不大于 $\frac{a}{2}$.

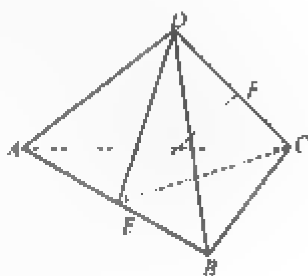
12. 54π. 设圆柱的底面半径为 r,高为 h,由题设得 $\pi r^2 h = 2\pi r^2 + 2\pi rh$,即 $h = \frac{2r}{r-2}$. 从而体积 $V = \pi r^2 h = 2\pi \cdot \frac{r^3}{r-2}$. 令 $r - 2 = x(x > 0)$,则 $V = 2\pi \cdot \frac{(2+x)^3}{x} = 2\pi \cdot \frac{(1+1+x)^3}{x} \geqslant 2\pi \cdot \frac{(3\sqrt[3]{x})^3}{x} = 54\pi$. 当且仅当 $x = 1$,即 $r = 3$ 时,等号成立.





（第13题）

13. ② 如图，设 $PA=a$，$PB=b$，$PC=c$，作 $PH\perp$ 平面 ABC，垂足为 H，易知 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心。连接 BH 并延长交 AC 于 D，连接 PD，则 $BD\perp AC$，$PD\perp AC$，故 $\angle PDB$ 为二面角 $P-AC-B$ 的平面角，即 $\angle PDB=\alpha$。在 $Rt\triangle BPD$ 中，$PD=\dfrac{PA\cdot PC}{AC}=\dfrac{ac}{\sqrt{c^2+a^2}}$，$BD=\sqrt{PD^2+PB^2}=\sqrt{\dfrac{c^2a^2}{c^2+a^2}+b^2}=\dfrac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{c^2+a^2}}$，所以 $\cos^2\alpha=\left(\dfrac{PD}{BD}\right)^2=\dfrac{c^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$。同理，$\cos^2\beta=\dfrac{b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$，$\cos^2\gamma=\dfrac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$，所以 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$。取 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{\sqrt3}{3}$，可知①③都不正确。又 $\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma=\sec^2\alpha+\sec^2\beta+\sec^2\gamma-3\geq\dfrac{9}{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}-3=6$，所以②正确。



（第14题）

14. $\dfrac{2\sqrt3}{27}$。如图，分别取 AB、CD 的中点 E、F，连接 CE、DE、EF。因为 $DA=DB=CA=CB=1$，所以 $DE\perp AB$，$CE\perp AB$，且 $DE=CE$，从而 $AB\perp$ 平面 CDE，$EF\perp CD$。设 $AB=2a$，$CD=2b$，则 $EF=\sqrt{CE^2-CF^2}=\sqrt{BC^2-BE^2-CF^2}=\sqrt{1-a^2-b^2}$，故 $V_{ABCD}=\dfrac13 S_{\triangle CDE}\cdot AB=\dfrac13\cdot\dfrac12\cdot 2b\cdot\sqrt{1-a^2-b^2}\cdot 2a=\dfrac23\sqrt{a^2b^2(1-a^2-b^2)}\leq\dfrac23\sqrt{\left(\dfrac{a^2+b^2+1-a^2-b^2}{3}\right)^3}=\dfrac{2\sqrt3}{27}$，当且仅当 $a^2=b^2=1-a^2-b^2$，即 $a=b=\dfrac{\sqrt3}{3}$，亦即 $AB=CD=\dfrac{2\sqrt3}{3}$ 时，上式取等号。

15. $\dfrac{9\pi}{2(\pi+1)^2}a^3$。设圆柱底面半径为 r，可以用两种方案制作。方案1：选择 $2a$ 为圆柱的高，则底面周长为 $3a-2r$，由 $2r+2\pi r=3a$，得 $r=\dfrac{3a}{2(\pi+1)}$，又 $4r=\dfrac{6a}{\pi+1}<2a$，所以体积 $V_1=\pi r^2\cdot 2a=\dfrac{9\pi}{2(\pi+1)^2}a^3$。方案2：选择 $3a-2r$ 为圆柱的高，$2a$ 为底面周长，由 $2\pi r=2a$，得 $r=\dfrac{a}{\pi}$，又 $4r=\dfrac{4a}{\pi}<2a$，所以体积 $V_2=\pi r^2(3a-2r)=\dfrac{3\pi-2}{\pi^2}a^3$。因为 $V_1>V_2$，故最大体积为 $\dfrac{9\pi}{2(\pi+1)^2}a^3$。

16. $\pi-\arctan\dfrac43$。设 O 为球心，O_1 为底面 $\triangle ABC$ 所在圆的圆心，两个正三棱锥的顶点分别为 P、Q，BC 中点为 D，$\triangle ABC$ 的边长为 a，$OO_1=d$，则 $\tan\alpha=\dfrac{PO_1}{O_1D}=\dfrac{R-d}{O_1D}$，$\tan\beta=\dfrac{R+d}{O_1D}$。因为 $O_1D=\dfrac13 AD=\dfrac{\sqrt3}{6}a$，$AO_1=\dfrac{\sqrt3}{3}a$，$R^2-d^2=AO_1^2=\dfrac13 a^2$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\dfrac{4\sqrt3R}{3a}$。显然，当平面 ABC 过球心 O 时，a 有最大值 $\sqrt3R$，从而 $\tan(\alpha+\beta)$ 取最大值 $-\dfrac43$，故 $\alpha+\beta$ 的最大值为 $\pi-\arctan\dfrac43$。



三、解答题

17. 设 $PA=a, PB=b, PC=c$，因为 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90^\circ$，所以四面体的体积 $V=\frac{1}{6}abc$.

又 $S=a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$

$\geq 3\sqrt[3]{abc}+\sqrt{2ab}+\sqrt{2bc}+\sqrt{2ca}$

$\geq 3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{abc}=3(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{abc}$

$=3(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{6V}$，

所以 $V\leq\frac{5\sqrt{2}-7}{162}S^3$

当且仅当 $a=b=c$ 时，上式等号都成立.

故 $V_{max}=\frac{5\sqrt{2}-7}{162}S^3$

18. 由题设得 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$，且 $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以

$\sin^2\alpha=1-\sin^2\beta-\sin^2\gamma=\frac{1}{2}(\cos2\beta+\cos2\gamma)$

$=\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)$.

因为 $\cos(\beta-\gamma)>\cos(\beta+\gamma)$，所以 $\sin^2\alpha>\cos^2(\beta+\gamma)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-(\beta+\gamma)\right)$.

当 $\beta+\gamma\geq\frac{\pi}{2}$ 时，$\alpha+\beta+\gamma>\frac{\pi}{2}$；

当 $\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$ 时，$\alpha>\frac{\pi}{2}-(\beta+\gamma)$，即 $\alpha+\beta+\gamma>\frac{\pi}{2}$

故 $\alpha+\beta+\gamma>\frac{\pi}{2}$

另一方面，不妨设 $\alpha\geq\beta\geq\gamma$，则 $\sin\alpha\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\gamma\leq\frac{\sqrt{3}}{3}$

令 $\sin\alpha_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\gamma_1=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\sin^2\beta}$，则

$$\sin^2\alpha_1+\sin^2\beta+\sin^2\gamma_1=1.$$

从而 $\sin^2\beta=\cos(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma)=\cos(\alpha_1+\gamma_1)\cos(\alpha_1-\gamma_1)$.

因为 $\alpha_1-\gamma_1\leq\alpha-\gamma$，所以 $\cos(\alpha_1-\gamma_1)\geq\cos(\alpha-\gamma)$

于是 $\cos(\alpha+\gamma)\geq\cos(\alpha_1+\gamma_1)$，有 $\alpha+\gamma\leq\alpha_1+\gamma_1$.

只要 α,β,γ 不全相等，通过调整，可使 $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$ 增大. 所以，当 $\alpha=\beta=\gamma=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$\alpha+\beta+\gamma$ 取最大值 $3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$



综上所述，有 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta+\gamma\leqslant 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19. 设与 h_i 对应的底面面积为 $S_i(i=1,2,3,4)$，则四面体的体积为

$$V=\frac{1}{3}S_1h_1=\frac{1}{3}S_2h_2=\frac{1}{3}S_3h_3=\frac{1}{3}S_4h_4$$

又 $V=\frac{1}{3}(S_1+S_2+S_3+S_4)r$,

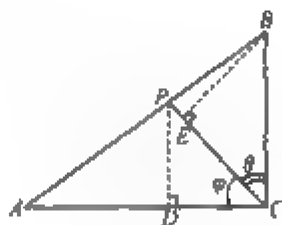
所以 $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}=\frac{1}{r}$.

由柯西不等式，得

$$(h_1+h_2+h_3+h_4)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}\right)\geqslant 4^2=16$$

故 $h_1+h_2+h_3+h_4\geqslant 16r$

20. 设四面体 $PABC$ 的体积为 V，如图，作 $PD\perp AC$，垂足为 D；作 $BE\perp PC$，垂足为 E，则



（第 20 题）

$$V\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AC\cdot PD\cdot BE$$

$$=\frac{b}{6}PD\cdot a\sin\theta=\frac{1}{6}ab\cdot PD\sin\theta$$

$$=\frac{1}{6}ab\cdot PD\sin(90^\circ-\varphi)=\frac{1}{6}ab\cdot PD\cos\varphi.$$

当且仅当面 $PBC\perp$ 面 PCA 时，上式等号成立。

在 $\triangle PAC$ 中，由 $AD+DC=b$，得

$PD\cot A+PD\cot\varphi=b$，其中 $\cot A=\frac{b}{a}$

所以 $PD=\dfrac{b}{\frac{b}{a}+\cot\varphi}$.

从而 $V\leqslant\frac{1}{6}ab\cdot\dfrac{b\cos\varphi}{\frac{b}{a}+\cot\varphi}$

$$=\frac{1}{6}a^2b^2\cdot\frac{\cos\varphi}{b+a\cot\varphi}$$

$$=\frac{1}{6}a^2b^2\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{(b+a\cot\varphi)^2}}$$

$$=\frac{1}{6}a^2b^2\sqrt{\frac{1}{(1+\tan^2\varphi)(b+a\cot\varphi)^2}}.$$

令 $x=\tan\varphi(x>0)$，则

$$f(x)=(1+x^2)\left(b+\frac{a}{x}\right)^2=b^2x^2+2abx+a^2+b^2+\frac{2ab}{x}+\frac{a^2}{x^2}$$

$$=\left(b^2x^2+\frac{ab}{x}+\frac{ab}{x}\right)+\left(abx+abx+\frac{a^2}{x^2}\right)+a^2+b^2$$



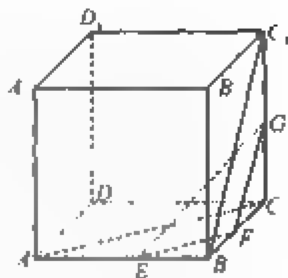
$\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^4}+3\sqrt[3]{a^4b^2}+a^2+b^2=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^3$.

当且仅当面 $PBC\perp$ 面 PCA，且 $\tan\varphi=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时，上式等号成立.

故四面体 $P-ABC$ 体积最大值为 $\frac{a^2b^2}{6(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}$.

第13讲　立体几何中的计数问题

一、选择题



第1题

1. C. 如图，分别取 AB、BC、CC_1 的中点 E、F、G，则 $EF\parallel AC$，$FG\parallel BC_1$，所以 $\angle EFG$ 为 AC 与 BC_1 所成的角(或其补角). 又设 $AB=1$，则 $EF=FG=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$EG=\frac{\sqrt{6}}{2}$，由余弦定理，得 $\cos\angle EFG=-\frac{1}{2}$，即 $\angle EFG=120^\circ$，则 AC 与 BC_1 所成角为 60°. 从而，过点 A_1 且与 AC、BC_1 均成 60° 角的直线有3条.

2. B. 共有 $C_8^3=56$ 个三角形，每个面上至少有2个非锐角三角形，每个对角面上也至少有2个非锐角三角形，所以至少有24个非锐角三角形. 从而最多可能有 $56-24=32$ 个锐角三角形.

3. B. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，取 AB_1、BC_1、CD_1、DA_1，这四条直线显然两两异面，所以 $n\geqslant 4$. 又所求异面直线与正方体表面的交点两两不同，且最多有8个，而正方体仅有8个顶点，每个顶点只用一次，故 $n\leqslant 4$.

4. B. 由2、3、5的最小公倍数为30，而棱长为2、3、5的小长方体堆成的棱长为30的正方体的一条对角线穿过的小长方体为 $\left[\frac{30}{2}\right]+\left[\frac{30}{3}\right]+\left[\frac{30}{5}\right]-\left[\frac{30}{2\times 3}\right]-\left[\frac{30}{2\times 5}\right]-\left[\frac{30}{3\times 5}\right]+\left[\frac{30}{2\times 3\times 5}\right]=22$ 个. 所以棱长为90的大正方体的一条对角线穿过的小长方体的个数应为 $3\times 22=66$(个).

5. B、A、D、C.

6. B. 分三类：①两端点皆为顶点的共线三点组有 C_8^2 个；②两端点皆为面中心的共线三点组有 $\frac{6}{2}=3$ 个；③两端点皆为棱中点的共线三点组有 $\frac{12\times 3}{2}=18$ 个. 故共有 $C_8^2+3+18=49$(个).

7. D. 将9个点 $A_1,A_2,\cdots,A_9$ 分成三组 $\{A_1,A_2,A_3\}$、$\{A_4,A_5,A_6\}$、$\{A_7,A_8,A_9\}$，同一组中两点不连线，而不同组的两点间均连线. 对于其中任四点，至少有两点在同一组中，其间不连线，所以图中不存在四面体. 这时有 $C_3^1C_3^1C_3^1=27$ 个三角形.

8. A. 每一平行六面体被所指定的一个顶和三个中截面所在平面唯一确定(这些中截面中每一个都与该平行六面体的所有顶点等距). 对于给定的4个不共面的点，存在7个到这4个点等距的平面，从这7个平面中任选3个，有 $C_7^3=35$ 种. 但是现在需要三个交于一点(平行六面体的中心)的平面，故应从35个平面组中排除那些平行于同一直线的三平面组. 这样的平面组有6个，故能确定平行六面体共有29个.

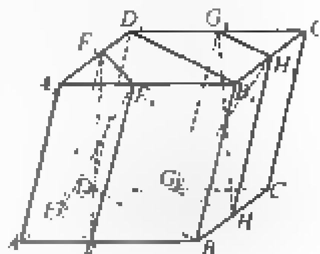
另解　这平行六面体确定的不共面的四点组的组数为 $\frac{C_8^4-12}{2}=29$，故能确定平行六面体共有29个.



二、填空题

9. 48. 正方体共有 6 个表面和 6 个对角面，它们都是正方形或矩形，而每个正方形或矩形中都有 4 个直角三角形，这些直角三角形的顶点都是正方体的顶点. 故共有 $12\times4=48$ 个直角三点组.

10. 12 条. 如图，因为 E、F、F_1、E_1 分别是棱 AB、AD、A_1D_1、A_1B_1 的中点，所以面 EFF_1E_1 // 面 BDD_1B_1，从而平行四边形 EFF_1E_1 的四条边和两条对角线共 6 条直线都与平面 BDD_1B_1 平行. 同理，在平面 BDD_1B_1 的另一侧也有 6 条直线与平面 BDD_1B_1 平行. 故与平面 BDD_1B_1 平行的直线共有 $6\times2=12$ 条.

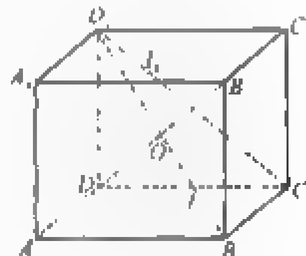


（第 10 题）

11. 36. 分两类：第一类取一个表面有 4 个正交线面对，则 6 个表面共有 $4\times6=24$ 个正交线面对. 第二类取一个对角面有 2 个正交线面对，则 6 个对角面共有 $2\times6=12$ 个正交线面对. 综上所述，共有 $24+12=36$ 个正交线面对.

12. 36. 正四面体内部各小球的放置规律是，从上往下，第 1 层 1 个，第 2 层 3 个，第 3 层 6 个，……，第 n 层 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个. 设共放有 n 层小球，其放球总数 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. 由 $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)=120$，得 $n=8$. 故四面体内共放 8 层小球，其底面所放球的个数为 $\frac{8\times9}{2}=36$ 个.

13. 无数对. 如图，连接 BD_1，其必与 DB_1 相交，记交点为 O，则 BD_1 与 AB 交于 B，与 A_1D_1 交于 D_1，记 BD_1 为 l_1. 再在 CC_1 上任取一点 M，连接 D_1M（或 BM、DM 均可），记为 l_2，则这样的 l_2 有无穷多条. 从而满足条件的相交直线对 l_1、l_2 有无数对.



（第 13 题）

14. 6 个. 从上垂直往下看，各阴影面积的和为 1. 设有 n 个正方体，各正方体侧面面积之和为 $4(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})$，则有 $4(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})+1\geqslant8.8$，即 $2^n\geqslant20$. 解得 $n\geqslant5$，即 $n_{\min}=6$.

15. 120. 依题意，新的立体图形共有 24 个顶点，每两点连一线段，共有 $C_{24}^2=276$ 条，其中所有的棱都在原立方体的表面的共有 36 条. 新立体图形的每个面上有 8 个顶点，除去棱以外，还可以连 $\frac{5\times8}{2}=20$ 条，6 个面共 120 条都在原立方体的表面上. 因此，位于原立方体内部的线段共有 $276-36-120=120$（条）.

16. 30. 因为对于一个已经涂好的正方体来说，为使不出现重复计数，可选一面为底面，选法有 $C_6^1=6$ 种，再选一面为正面（这时应排除上底面），选法有 $C_4^1=4$ 种. 故满足题设条件的涂法有 $\frac{6!}{6\times4}=30$ 种.

三、解答题

17. 要确定一个四棱锥，需要两步：第一步，确定底面；第二步，确定顶点.

在确定底面时，有四种情况：以侧面为底面；以对角面为底面；以正五棱的同一底面的四点构成的四边形为底面；以一底面的一边与另一底面内与它平行的一条对角线构成的四边形为底面.

在确定顶点时，要针对以上确定底面的四种情况，分别确定顶点的个数.

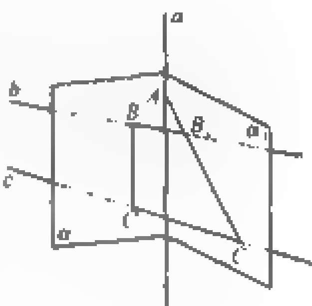


(1) 以侧面为底面，共有5种；以对角面为底面，有5种；以一底面的一边与另一底面内和它平行的对角线构成的四边形为底面，共有10种．对于以上20种确定底面的方法中的每一种，其顶点的确定均有6种．因此，针对这一类底面的确定方法，共能确定四棱锥 $20\times6=120$(个)．

(2) 以正五棱柱同一底面的四点构成的四边形为底面，共有 $2C_5^4=10$ 种．对于以上10种底面，其顶点的确定均有5种．因此，针对这一类底面，共能确定四棱锥 $10\times5=50$(个)．综合(1)(2)可知，以正五棱柱的10个顶点为顶点的四棱锥共有 $120+50=170$ 个．

18. 分两步．

第一步 证明必存在过直线a的平面同时与直线b,c都相交，且这样的平面有无穷多个．



(第18题)

如图，在直线b上取一点B，由a、b成异面直线知，点B与直线a可确定一个平面α．若平面α与直线c相交，则第一步已成立；若平面α与直线c平行，则再取直线b上的另一点B_1，过点B_1与直线a再作一个平面α_1．由a、b成异面直线知，平面α_1不同于平面α，且平面α_1必与直线c相交，否则$c\parallel\alpha_1$，$c\parallel\alpha$，由此可推出直线c平行于平面α与平面α_1的交线a，与已知a、c为异面直线矛盾．

所以，存在过直线a的平面α与直线b相交于B，与直线c相交于C．

又由点B的任意性知，这样的平面α有无穷多个(事实上，过直线a的所有面中，最多有一个与直线b平行，也最多有一个与直线c平行，除这两个平面外，均与直线b,c同时相交)．

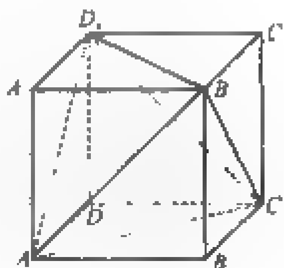
第二步，讨论直线BC与直线a的关系．

连接BC，若直线BC与直线a不平行，则BC与a相交于点A，即得与直线a,b,c均相交的直线l．

若直线BC与直线a平行，则过a再作均与直线b,c相交的平面β，交点为B_1,C_1．由b,c为异面直线知，B_1C_1不会与BC平行，从而，直线B_1C_1必与直线a相交，则直线B_1C_1与直线a,b,c同时相交．

由于过直线a的平面有无穷多个，最多去掉三个(与直线b平行、与直线c平行，或使$BC\parallel a$的一个平面)，故同时与直线a,b,c都相交的直线有无穷多个．

19. n的最小值为5．



(第19题)

如图，连接面对角线可以将正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$分割成一个正四面体B_1-ACD_1和四个直角四面体B_1-ACB，$A_1-AB_1D_1$，$C_1-B_1CD_1$，$D-ACD_1$．因此$n=5$的分割是可以达到的．

其次，分成四个四面体是不可能的．考虑两个平行的正方形$ABCD$和$A_1B_1C_1D_1$，它们分割后只能属于不同的四面体．又四面体的每个面只能是三角形，在此每个面至少属于两个四面体．

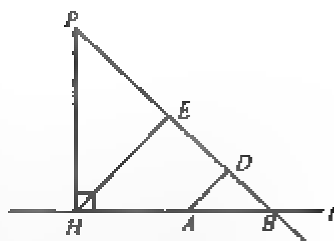
设正方体棱长为a，则这四个四面体中每一个体积都不超过 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\times a=\frac{1}{6}a^3$，则四个四面体体积之和不超过 $4\times\frac{1}{6}a^3=\frac{2}{3}a^3<a^3$，矛盾．

故n的最小值为5．

20. 由于n个点不共面，因此也不共线．下面证明，必存在一条直线恰好通过其中的两个点．



n个点作两两连线，最多有C_n^2条，每条直线外的点到直线的距离中必有最小的．记距离取最小值时，所对应的直线为l，并设P点到l的距离PH为最小距离．如图，下证l恰好通过其中的两个已知点．



（第20题）

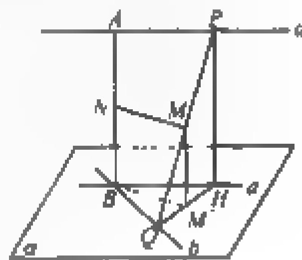
若不然，则l上至少有3个已知点，其中必有2个点在H的同侧，不妨设为A和B，则有$0 \leq HA < HB$．连接PB，作$AD \perp PB$，垂足为D，$HE \perp PB$，垂足为E，则$AD \leq HE < PH$，即存在点A到直线PB的距离小于PH，这与PH的最小性矛盾．故l恰好通过两个已知点．此时，l之外还有$n-2$个已知点，每个点与l可以确定一个平面，最多可以确定$n-2$个平面，但通过l可以作无穷多个平面，故去掉这样$n-2$个平面后，还有无穷多个平面通过直线l，它们中的每一个平面恰好通过两个已知点（l上的两个已知点）．

第14讲　轨迹与非常规问题

一、选择题

1．C．易知，点P到底面$ABCD$的距离等于它到直线AB的距离d，点P到直线B_1C_1的距离等于它到点B_1的距离．由题设知$\frac{PB_1}{d}=\frac{1}{2}<1$，故动点$P$的轨迹为侧面$ABB_1A_1$上以$B_1$为焦点，$AB$为相应准线的椭圆的一部分．

2．B．如图，设A、B为异面直线a、b的公垂线的两个垂足，取AB的中点N，作$BH \parallel AP$，设BH与b所确定的平面为α，则$a \parallel \alpha$．过点P作$PH \perp \alpha$，垂足为H，作$MM' \perp \alpha$，则垂足M'在BQ上．因为$MM' \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}PH \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB \mathrel{\underline{\parallel}} NB$，所以点$M$的轨迹在过点$N$且平行于$\alpha$的平面上．又异面直线$a$、$b$，所以$\angle QBH=90°$，$QH=\sqrt{l^2-d^2}$，从而$MN=M'B=\frac{1}{2}QH=\frac{1}{2}\sqrt{l^2-d^2}$为常数．故点$M$的轨迹在以$N$为圆心、$\frac{1}{2}\sqrt{l^2-d^2}$为半径的圆上．



（第2题）

3．D．因为其中一点在经过另一点的所有平面上的射影点对两已知点的视角均为90°，所以射影点的轨迹是以两已知点所连线段为直径的球面．

二、填空题

4．过EF上一定点且与EF垂直的平面（其中E、F分别为AB、CD的中点）．设AB、CD的中点分别为E、F，在$\triangle MAB$和$\triangle MCD$中，由中线长公式，得$4ME^2+AB^2=2(MA^2+MB^2)$，$4MF^2+CD^2=2(MC^2+MD^2)$．因为$MA^2+MB^2=MC^2+MD^2$，所以$4ME^2+AB^2=4MF^2+CD^2$，即$ME^2-MF^2=\frac{1}{4}(CD^2-AB^2)$为常数．又$E$、$F$为定点，故点$M$的轨迹为过$EF$上一定点且与$EF$垂直的平面．

5．$\frac{5\sqrt{3}}{6}\pi$．此曲线分布在六个表面上，在平面AC、平面AB_1、平面AD_1内的部分均是以A为圆心、半



径为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，圆心角为$\frac{\pi}{6}$的圆弧，三段圆弧长度之和为$3\times\frac{\pi}{6}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$，在平面$A'C'$、平面$C'D$、平面$BC'$内的部分均是半径为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，圆心角为$\frac{\pi}{2}$的圆，三段圆弧长度之和为$3\times\frac{\pi}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$。故此曲线总长为$\frac{5\sqrt{3}}{6}\pi$。

三、解答题

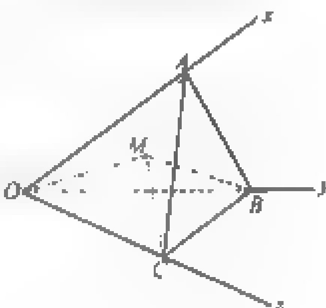
6. 过点A、B分别作$AA'\perp\alpha$，$BB'\perp\alpha$，垂足分别为A'、B'，若P为轨迹上一点，依题意$\angle APA'=\angle BPB'$，则$\triangle AA'P\backsim\triangle BB'P$，所以有

$$\frac{PA'}{PB'}=\frac{AA'}{BB'}=\lambda.$$

因为A、B为定点，α为已知的平面，所以AA'、BB'为定值，而λ为常数。

设分线段$A'B'$之比为λ的内、外分点分别为M、N，则P点的轨迹为平面α内以MN为直径的圆。

7. 分法不唯一。下面给出一种较精确的分法：将已知正方体分为n^3个相等的小正方体，令n充分大，使得与已知正方体共面的小正方体中，每一个面及内部均不含已知点，找到n，使得$n^3>2003^3$，对于所讨论的小正方体及剩余的正方体满足题设。



（第8题）

8. 如图，$O-xyz$为所给三面角，A、B、C分别为棱Ox、Oy、Oz上的点，且到相对面的距离均为a，则三棱锥$O-ABC$的体积为

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle OBC}\cdot a=\frac{1}{3}S_{\triangle OCA}\cdot a=\frac{1}{3}S_{\triangle OAB}\cdot a,$$

从而
$$S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OCA}=S_{\triangle OAB}=\frac{3V}{a}.$$

设M为三面角内或表面上的任意一点，用a_1、a_2、a_3分别表示点M到平面Oyz、Ozx、Oxy的距离，以M为顶点，分别以OBC、OCA、OAB为底面的棱锥体的体积和为

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle OBC}\cdot a_1+\frac{1}{3}S_{\triangle OCA}\cdot a_2+\frac{1}{3}S_{\triangle OAB}\cdot a_3=\frac{V}{a}(a_1+a_2+a_3).$$

记四面体$MABC$的体积为V'，于是三棱锥$O-ABC$的体积为

$$V=\frac{V}{a}(a_1+a_2+a_3)\pm V'.$$

其中V'的符号取决于点M在平面ABC的哪一侧。由上可知，当且仅当$V'=0$，即点M属于$\triangle ABC$时，有$a_1+a_2+a_3=a$。

因此，所求的轨迹为$\triangle ABC$。

9. 任意三个已知平面恰有一个公共点，我们称之为核心点。

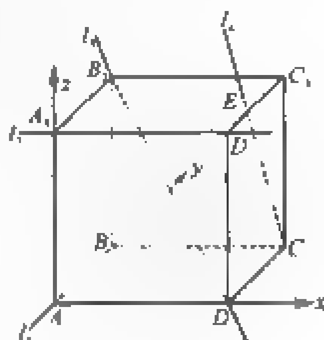
对任一已知平面S，设S同一侧的核心点中，P距S最近，S_1、S_2、S_3是过P的三个已知平面。这时，S、S_1、S_2、S_3组成一个四面体$PABC$。

棱PA、PB、PC内部任一点到S的距离小于P到S的距离，因此这些点都不是核心点。从而任一已知平面均不与这些棱的内部相交。四面体$PABC$是n个已知平面将空间分成的一部分。

于是，如果已知平面S的两侧均有核心点，那么空间被n个平面分成的部分中，有两个四面体以S为

面.如果 S 只有一侧有核心点,相应的四面体只有一个.因为四面体有 4 个面,所以至少有四面体 $\frac{2n-a}{4}$ 个,其中 a 表示只有一侧有核心点的平面 S 的个数.如果四个已知平面 $M_i(i=1,2,3,4)$ 均有一侧无核心点,那么核心点全在它们围成的四面体 T 中.因为 $n\geqslant 5$,至少还有一个不同的已知平面 S,S 应与 M_i 中每两个有一公共点,从而 S 应与四面体 T 的 6 条棱均相交,这是不可能的.因此 $n\leqslant 3$,结论成立.

10. 如图,以 A 为坐标原点,AD、AB、AA_1 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立坐标系.设 $AD=1$,$E(a,b,1)$,l 为与 l_1、l_2、l_3、l_4 均相交的直线,λ 为直线 l 与 l_1 交点的竖坐标.考虑所有直线在平面 ADA_1 与平面 ABA_1 的射影.设 l'、l'' 分别是 l 在这两个平面上的射影.类似表示其他直线与点.



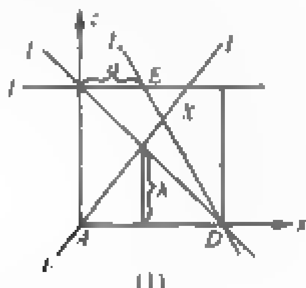
(第 10 题)

事实上,l'_1 与 l''_2 是点,设 $x=l_1\cap l_3$,x'、x'' 是 x 在两个平面上的射影,z'、z'' 是 x'、x'' 的竖坐标,如图(1)、(2).

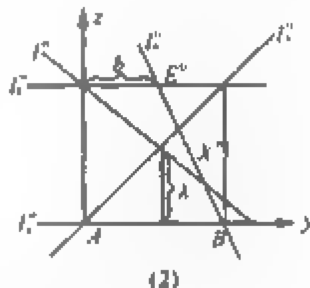
于是,l'_3 的方程为 $x+(1-a)z=1$

l' 的方程为 $x+\frac{\lambda-1}{\lambda}z=0$.

因此,l'_3 与 l' 的交点方程为 $z\left(\frac{1}{\lambda}-a\right)=1$ ①



(1)



(2)

(第 10 题)

又 l''_3 $y+(1-b)z=1$ 与 l'' $\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)y+z=1$ 的交点方程为 $\left(1-b+\frac{1-\lambda}{1-2\lambda}\right)z''=1$ ②

易见,所求问题等价于 $z'=z''$.

因此,由①、②得 $\frac{1}{\lambda}-a=1-b+\frac{1-\lambda}{1-2\lambda}$,即

$$(2-b+2a)\lambda^2-(a+3-b)\lambda+1=0$$

因为上式有非负根,所以

$$\Delta=a^2+b^2-2ab-2a-2b+1\geqslant 0,$$

即 $4ab\leqslant(a+b-1)^2$.

从而,$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 1$.

故所求轨迹为 F 在正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 内,其中 $E(a,b,1)$ 满足 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 1(a>0,b>0)$.

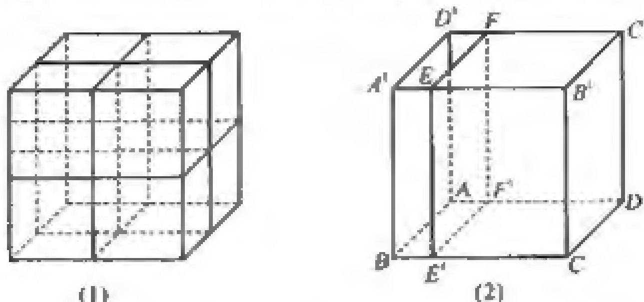
11. 这种游戏最多进行 25 轮.

可行性.不妨设 A 只能将 $1\times1\times10$ 的砖形物垂直于纸面方向摆放,B 只能将砖形物竖直摆放,C 只



能将砖形物横着摆放.

如图(1),将 $10\times10\times10$ 的立方体格分成 8 个相同的 $5\times5\times5$ 的立方体格. A 的 25 个砖形物全部放入右上两部分, B 的 25 个砖形物全部放入左前两部分, C 的 25 个砖形物全部放入后下两部分即可.



(1) (2)

(第 11 题)

最小性. 假设游戏进行了 m 轮($m>25$). 因为 $m>5^2$, 所以在侧面 $BCC'B'$ 上, 至少有 6 行(或列)中有 A 放入的砖形物.

不妨设是靠近右侧的 6 列中有 A 放入的砖形物, 如图(2).

这样, B 放置的 m 个砖形物全放长方体 $BB'E'EAA'F'F$ 中.

由于 BE 不超过 4, 则 $\frac{m}{|BE|}>6$, 所以 $A'B'EF$ 面上必有一个垂直于纸面的 1×10 的方格条上, 至少有 7 个 B 放入的砖形物.

同理, C 放置的砖形物全在一个 $3\times10\times10$ 的长方体内.

因为 $\frac{m}{3}>8$, 则可推知 A 放置的砖形物全在一个 $1\times10\times10$ 的长方体内, 这显然矛盾.

故 $m\leqslant25$, 最小性得证.

12. 首先证明, 存在一个"足球体", 其五边形的面有 12 个、六边形的面有 20 个.

考虑正 20 面体, 截去 12 个正五棱锥, 其中每个正五棱锥的顶点是正 20 面体的顶点, 每个正五棱锥的底面是正 20 面体的顶点引出的五条棱的 $\frac{1}{3}$ 处构成的正五边形. 这样, 用 12 个正五边形代替了正 20 面体的 12 个顶点, 用 20 个正六边形代替了正 20 面体的 20 个面, 且与正五边形相邻的面都是正六边形.

下面证明这是唯一可能的情形.

设 B 是一个"足球体", 考虑 B 的任意一个顶点, 设它属于 x 个正五边形的面, 属于 y 个正六边形的面, 则 $x+y\geqslant3$. 这是因为每个多面体的顶点至少属于 3 个面. 由于正五边形和正六边形的内角分别为 108° 和 120°, 于是有 $x\cdot108^\circ+y\cdot120^\circ<360^\circ$.

从而 $x+y\leqslant3$, 故 $x+y=3$, 且 $x>0$.

这就是说一个"足球体"的每个顶点只属于 3 个面, 且这 3 个面不可能都是正六边形的面, 即至少有一个面是正五边形的面. 由于这 3 个面是两两相邻的, 且正五边形的面不能是相邻的, 所以每个顶点一定只属于一个正五边形、两个正六边形.

考虑任意一个正六边形的面, 它所有的顶点属于一个正五边形和一个正六边形的面. 所以与正六边形相邻的面是交替的正五边形和五六边形, 即这两种多边形各有 3 个. 现在用一个正五棱锥的底面盖住

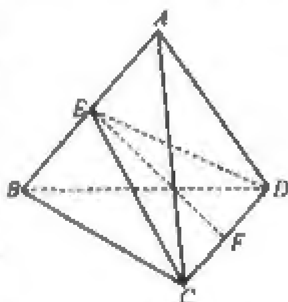


每一个正五边形，且它的侧棱是与这个正五边形的面相邻的正六边形的边的延长线．这样，正六边形的面变为正三角形，正五边形的面被延长的五条棱的交点（即正五棱锥的顶点）代替．因为与一个正五边形的面相邻的任意两个相邻的正六边形的面交角相同（两个正六边形和一个正五边形交于一点的方式是唯一的），而且新的多面体交于一点的相邻三角形的面交角也相同，所以新的多面体是一个正 20 面体，它有 12 个顶点和 20 个面．因此，“足球体”有 12 个正五边形的面和 20 个正六边形的面．

第 15 讲　立体几何综合题

一、选择题

1．A．因为长方体的对角线长为 1，所以 $a^2+b^2+c^2=1$，即 $a^2+b^2=1-c^2$．又 $a+b=1+c$，所以 $ab=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\frac{(1+c)^2-(1-c^2)}{2}=c^2+c$．故 a、b 是关于 x 的方程 $x^2-(1+c)x+(c^2+c)=0$ 的两个不等的正根（因为 $0<a<b$），所以 $\Delta=(1+c)^2-4(c^2+c)>0$，解得 $0<c<\frac{1}{3}$．



（第 2 题）

2．D．如图，在四面体 $ABCD$ 中，$AB=x$，$AC=AD=BC=CD=DA=1$，设 E、F 分别为 AB、CD 的中点，连接 CE、DE、EF，则 $CE=DE=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$，从而 $EF=\sqrt{CE^2-CF^2}=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3-x^2}$，故 $F(x)=\frac{1}{3}S_{\triangle CDE}\cdot AB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\sqrt{3-x^2}\times x=\frac{x}{12}\sqrt{3-x^2}=\frac{1}{12}\sqrt{x^2(3-x^2)}$．由 $1-\frac{x^2}{4}>0$ 及 $3-x^2>0$，得定义域为 $(0,\sqrt{3})$．显然，$F(x)$ 在 $(0,\sqrt{3})$ 上不是增函数，但 $F(x)=\frac{1}{12}\sqrt{x^2(3-x^2)}\leqslant\frac{1}{12}\cdot\frac{x^2+(3-x^2)}{2}=\frac{1}{8}$，当且仅当 $x^2=3-x^2$，即 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时上式取等号．故 $F(x)_{max}=\frac{1}{8}$．

3．A．由题设知，A、B、C、D 四个容器的容积分别为 a^3、a^2b、ab^2、b^3．分三种情形讨论：(1) 若先取 A、B，则后取者只能取 C、D．因为 $(a^3+a^2b)-(ab^2+b^3)=(a+b)^2(a-b)$ 的正负不能确定，故这种取法无必胜的把握．(3) 若先取 A、D，则后取者只能取 B、C．因为 $(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)=(a-b)^2(a+b)>0$，所以 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$，故先取 A、D 是唯一必胜的方案．

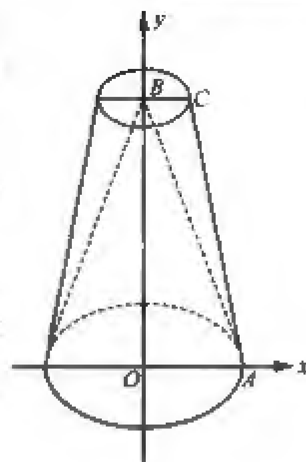
二、填空题

4．12π．因为 a、b、c 均为正数，且 $a+b+c=1$，所以 $0<a<1$，$0<b<1$，$0<c<1$．于是，以 $\frac{1}{a}-1$、$\frac{1}{b}-1$、$\frac{1}{c}-1$ 为棱长的长方体的体积为 $V=\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)=\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}\cdot2\sqrt{ca}\cdot2\sqrt{ab}}{abc}=8$，当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时，$V_{min}=8$．这时，长方体外接球的直径为 $2R=\sqrt{\left(\frac{1}{a}-1\right)^2+\left(\frac{1}{b}-1\right)^2+\left(\frac{1}{c}-1\right)^2}=2\sqrt{3}$，故 $S_{球}=4\pi R^2=12\pi$．

5．1．如图，$\triangle ABC$ 是由三条直线 $y=3$、$y=-3x+6$、$y=-\frac{3}{2}x+3$ 所围成的三角形，其中 $A(2,0)$、



B(0,3)、C(1,3)，显然，△ABC绕 y 轴旋转一周所得几何体的体积等于上、下底面半径分别为 $BC=1$、$OA=2$，高为 $OB=3$ 的圆台减去底面半径为 $OA=2$、高为 $OB=3$ 的圆锥的体积，即 $V=\frac{1}{3}\pi(1^2+1\times2+2^2)-\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 3=3\pi$. 又旋转1弧度所得几何体的体积为 $\frac{V}{2\pi}=\frac{3}{2}$，故旋转 $\frac{2}{3}$ 弧度所得几何体的体积为1.



（第5题）

6. 3. 设原正方体的棱长为 a，切割后的另一个正方体的棱长为 $b(a,b\in N^*$，$a>b)$，则有 $a^3-98=b^3$，即 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=98=1\times98=2\times49=7\times14$. 从而 $\begin{cases}a-b=1,\\a^2+ab+b^2=98;\end{cases}$ $\begin{cases}a-b=2,\\a^2+ab+b^2=49;\end{cases}$ $\begin{cases}a-b=7,\\a^2+ab+b^2=14.\end{cases}$ 解得 $a=5$，$b=3$.

三、解答题

7. 设O为顶点P在底面上的射影，则 $OP=h_1\sin\alpha_1=h_2\sin\alpha_2=h_3\sin\alpha_3$，所以 $h_2^2\sin^2\alpha_2=h_1h_3\sin\alpha_1\sin\alpha_3$. 因为 $h_2^2=h_1h_3$，所以 $\sin^2\alpha_2=\sin\alpha_1\sin\alpha_3$，即 $\frac{1-\cos2\alpha_2}{2}=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha_1+\alpha_3)-\cos(\alpha_1-\alpha_3)]$，亦即 $1-\cos2\alpha_2=\cos(\alpha_1-\alpha_3)-\cos(\alpha_1+\alpha_3)$. 又 $2\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3$，所以 $\cos(\alpha_1-\alpha_3)=1$. 因为 α_1,α_3 均为锐角，所以 $\alpha_1=\alpha_3$. 从而 $\alpha_2=\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}=\alpha_1$，故 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$.

8. (1) 由 $AB\perp BC$、$AB\perp CD$ 知，$AB\perp$ 平面 BCD，故平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD.

(2) 作 $CE\perp BD$，垂足为E，则 $CE\perp$ 平面 ABD. 作 $EF\perp AD$，垂足为F，连接CF，则 $CF\perp AD$，所以 $\angle CFE$ 为二面角 $C-AD-B$ 的平面角，即 $\angle CFE=\alpha$. 在Rt△BCD中，由面积关系，得 $CE=\frac{BC\cdot CD}{BD}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$DE=\sqrt{CD^2-CE^2}=\frac{x^2}{1+x^2}$.

在Rt△ABD中，$AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{2+x^2}$.

易知 △DFE ∽ △DBA，则 $EF=\frac{DE\cdot AB}{DA}=\frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)(2+x^2)}}$. 在Rt△CEF中，$CF=\sqrt{CE^2+EF^2}=\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2+x^2}}$.

故 $\sin\alpha=\frac{CE}{CF}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2+x^2}{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{1}{1+x^2}}(x>0)$.

易求得 $f(x)$ 的值域为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，故 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\alpha<1$.

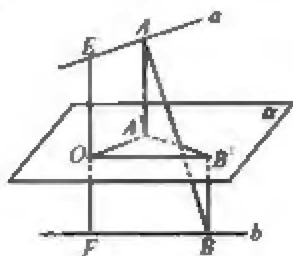
又 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 α 的取值范围是 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

9. 如图(1)，设EF的中点为O. 因为P为线段AB的中点，所以点P在EF的垂直平分面 α 上，从而

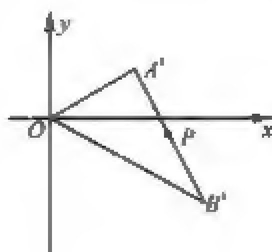


P 点的轨迹在平面 α 上.

设点 A、B 在平面 α 上的射影分别为 A'、B'，则由 $AP=BP=2$、$AA'=BB'=1$，得 $A'B'=2\sqrt{3}$，且 P 为 $A'B'$ 的中点.



(1)



(2)

(第 9 题)

因为 $a\parallel OA'$，$b\parallel OB'$，所以 $\angle A'OB'=60°$.

如图(2)，在平面 α 内，以 O 为原点，$\angle A'OB'$ 的平分线为 x 轴建立直角坐标系，设 $A'(\sqrt{3}t_1, t_1)$、$B'(\sqrt{3}t_2, -t_2)$，则 P 点的坐标 (x,y) 满足

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t_1+t_2), \\ y=\dfrac{1}{2}(t_1-t_2), \end{cases} \quad 则 \begin{cases} t_1+t_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}x, \\ t_1-t_2=2y. \end{cases}$$

因为 $|A'B'|=2\sqrt{3}$，所以 $\left[\sqrt{3}(t_1-t_2)\right]^2+(t_1+t_2)^2=12$，即 $(\sqrt{3}\cdot 2y)^2+\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2=12$，亦即 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$.

故 P 点的轨迹是 EF 垂直平分面上以 O 为中心，长轴长为 6，短轴长为 2 的椭圆.

10. (1) 易知 $V_k=\dfrac{(k+1)l}{n}\cdot\dfrac{kl}{n}\cdot\dfrac{l}{n}=\dfrac{k^2+k}{n^3}l^3\ (1\leqslant k\leqslant n-1)$.

(2) 由自然数的方幂和公式，得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}V_k&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2+k}{n^3}l^3\\&=\frac{l^3}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k\right)\\&=\frac{l^3}{n^3}\left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}\right]\\&=\frac{2n^2+n-3}{6n^2}l^3.\end{aligned}$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}V_k=l^3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n-3}{6n^2}=\dfrac{1}{3}l^3$.

